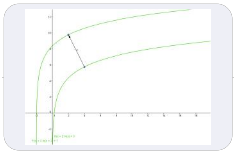
Abbildungen im Koordinatensystem

- Abbildungsgleichungen und Funktionsabbildungen -

Matrixmultiplikation

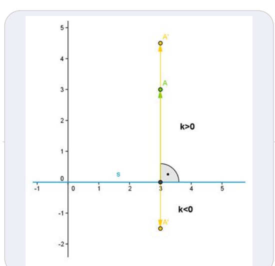


- Matrix $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
  - Matrix kann mit einem Vektor multipliziert werden
- Bildpunkt kann mit Matrix berechnet werden
  - $P(x|y) \longmapsto P'(x'|y')$
  - $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $\quad \begin{aligned} & x' = a \cdot x + b \cdot y \\ \wedge\ & y' = c \cdot x + d \cdot y \end{aligned}$

Parallelverschiebung

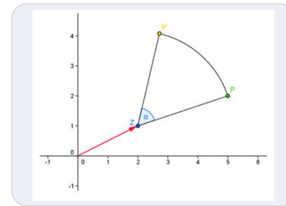
- Einer Funktion
  - $y = \frac{1}{2} \cdot (x-1)^2 + 3 \xrightarrow{\vec{v} = \binom{-2}{4}} y' = \frac{1}{2} \cdot (x - 1 + 2)^2 + 3 + 4 = \frac{1}{2} \cdot (x+1)^2 + 7$
  - $y = 2 \cdot \log x + 3 \xrightarrow{\vec{v} = \binom{-2}{4}} y' = 2 \cdot \log(x+2) + 3 + 4 = 2 \cdot \log(x+2) + 7$
- Als Abbildung
  - $P(x|y) \xrightarrow{\vec{v} = \binom{v_x}{v_y}} P'(x'|y')$
- Matrix
  - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Gleichung
  - $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$
  - $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \begin{aligned} & x' = x + v_x \\ \wedge\ & y' = y + v_y \end{aligned}$

Orthogonale Affinität



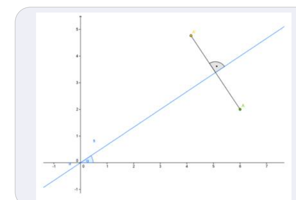
- Einer Funktion
  - Funktionsgleichung wird mit dem Faktor k multipliziert
- $P(x|y) \xrightarrow{x\text{-}Achse;k} P'(x'|y')$
- Matrix
  - $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
- Gleichung
  - $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
  - $\Leftrightarrow \begin{aligned} & x' = x \\ \wedge\ & y' = k \cdot y \end{aligned}$

Drehung



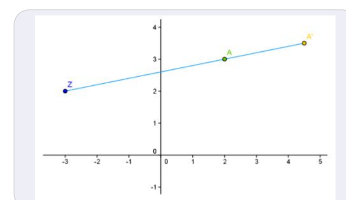
- $P(x|y) \xrightarrow{Z(x_Z|y_Z);\alpha} P'(x'|y')$
- Matrix
  - $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$
- Gleichung
  - $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x - x_Z \\ y - y_Z \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} x_Z \\ y_Z \end{pmatrix}$
  - $\Leftrightarrow \begin{aligned} & x' = \cos\alpha \cdot (x - x_Z) - \sin\alpha \cdot (y - y_Z) + x_Z \\ \wedge\ & y' = \sin\alpha \cdot (x - x_Z) + \cos\alpha \cdot (y - y_Z) + y_Z \end{aligned}$
- Eigenschaften
  - Für 90° ergibt sich die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
  - Für 180° ergibt sich die Matrix; (=Punktspiegelung) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Achsenspiegelung



- $P(x|y) \xrightarrow{s} P'(x'|y')$
- Matrix
  - $\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix}$ $\tan\alpha = m$
- Gleichung
  - $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & -\cos 2\alpha \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
  - $\Leftrightarrow \begin{aligned} & x' = \cos 2\alpha \cdot x + \sin 2\alpha \cdot y \\ \wedge\ & y' = \sin 2\alpha \cdot x - \cos 2\alpha \cdot y \end{aligned}$
- Eigenschaften
  - Die Gleichung gilt für Ursprungsgeraden
  - a ist der Winkel zwischen x-Achse und Gerade: tan a = m
  - Spiegelung an der x-Achse: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
  - Spiegelung an der y-Achse: $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
  - Winkelhalbierende y=x (= Umkehrfunktion) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Zentrische Streckung



- $P(x|y) \xrightarrow{Z;k} P'(x'|y')$
- Matrix
  - $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$
- Gleichung
  - $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} (1-k) \cdot x_Z \\ (1-k) \cdot y_Z \end{pmatrix}$
  - $\Leftrightarrow \begin{aligned} & x' = k \cdot x + (1-k) \cdot x_Z \\ \wedge\ & y' = k \cdot y + (1-k) \cdot y_Z \end{aligned}$