Exponential & Logarithmusfunktionen
- Rechenregeln und Funktionseigenschaften -

Exponentialfunktion

Gleichung

$y = a^x \quad a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

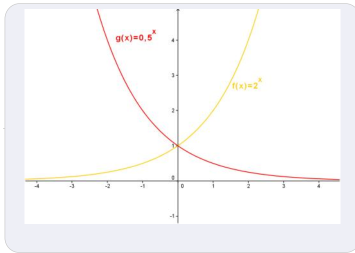
$\mathbb{D} = \mathbb{R}; \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

$a > 1 \Rightarrow$ Graph geht nach links gegen 0
Graph geht nach rechts gegen ∞

$a < 1 \Rightarrow$ Graph geht nach links gegen ∞
Graph geht nach rechts gegen 0

Asymptote: x-Achse

Punkt für alle a: P(0|1)



Abgebildete Exponentialfunktion

$f: x \mapsto a^x \xrightarrow{x-Achse;k} k \cdot a^x \xrightarrow{\vec{v}=\binom{b}{c}} k \cdot a^{x-b} + c$

$a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}; \; k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; b, c \in \mathbb{R}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R} \quad \mathbb{W} = \{y | y > c\}$ für $k > 0$
$\mathbb{W} = \{y | y < c\}$ für $k < 0$

Asymptote: y=c

Exponentialgleichungen

nach x auflösen

$12 = 22{,}0 \cdot 0{,}37^{\frac{x}{5{,}54}} \Leftrightarrow \frac{12}{22} = 0{,}37^{\frac{x}{5{,}54}}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{5{,}54} = \log_{0{,}37}\left(\frac{12}{22}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{5{,}54} = 0{,}6$

$\Leftrightarrow x = 3{,}4 \qquad \mathbb{L} = \{3{,}4\}$

gleiche Basen schaffen

$4^{x+1} = 8 \cdot 2^{x-3} \Leftrightarrow (2^2)^{x+1} = 2^3 \cdot 2^{x-3}$

$\Leftrightarrow 2^{2(x+1)} = 2^{x-3+3} \Leftrightarrow 2^{2x+2} = 2^x \quad | \log_2$

$\Leftrightarrow 2x + 2 = x \Leftrightarrow x = -2 \qquad \mathbb{L} = \{-2\}$

Logarithmusfunktion

Gleichung

$y = \log_a x \quad a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+; \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

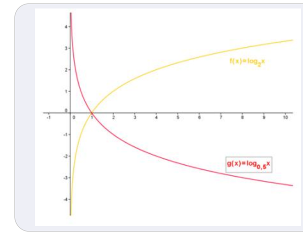
$a > 1 \Rightarrow$ Graph geht bei 0 gegen $-\infty$
Graph geht nach rechts gegen ∞

$a < 1 \Rightarrow$ Graph geht bei 0 gegen ∞
Graph geht nach rechts gegen $-\infty$

Asymptote: y-Achse

Punkt für alle a: P(1|0)

Logarithmusfunktion ist Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion



Abgebildete Logarithmusfunktion

$f: x \mapsto \log_a x \xrightarrow{x-Achse;k} k \cdot \log_a x \xrightarrow{\vec{v}=\binom{b}{c}} k \cdot \log_a(x-b) + c$

$a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}; \; k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}; b, c \in \mathbb{R}$

$\mathbb{D} = \{x | x > b\} \quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Asymptote: x=b

Logarithmus

Mit dem Logarithmus lässt sich ein x berechnen, dass im Exponenten steht

$a^x = b \Leftrightarrow x = \log_a b$

Logarithmensätze

$u, v \in \mathbb{R}^+; k \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$

$\log_a(u \cdot v) = \log_a u + \log_a v$

$\log_a \frac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$

$\log_a(u^k) = k \cdot \log_a u$

exponentielles Wachstum

$a_n = a_0 \cdot q^n$

$a_0 \triangleq$ Anfangswert
$a_n \triangleq$ Wert nach Zeit n
$q = 1 + \frac{p}{100} \triangleq$ Wachstumsfaktor ($p \triangleq$ Prozentsatz)
$n \triangleq$ Zeit

Beispiele:
- Zinseszins
- Bakterienvermehrung
- radioaktiver Zerfall
- Ladung eines Kondensators