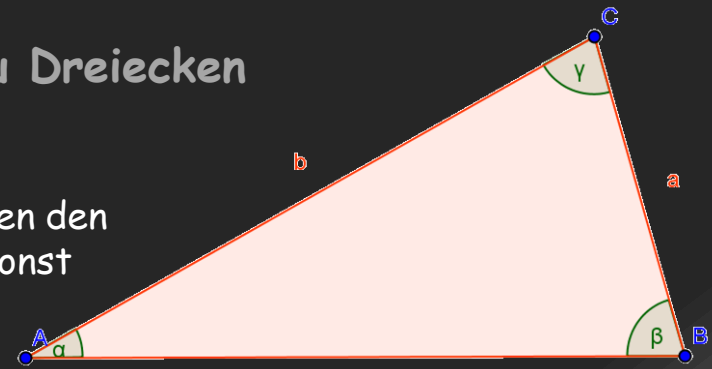


# Berechnungen in Dreiecken - Allgemeines zu Dreiecken

## Innenwinkelsatz

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$$

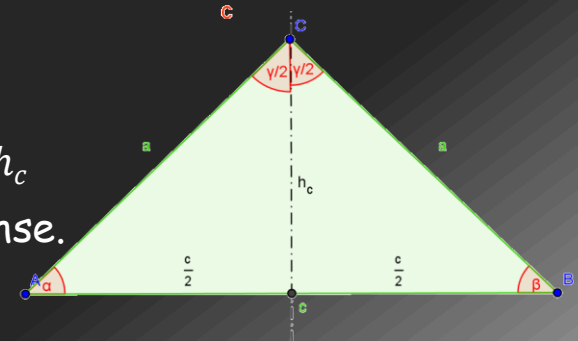
Die Ecken werden immer gegen den Uhrzeigersinn beschriftet, sonst falscher Umlaufsinn!



## Besondere Dreiecke

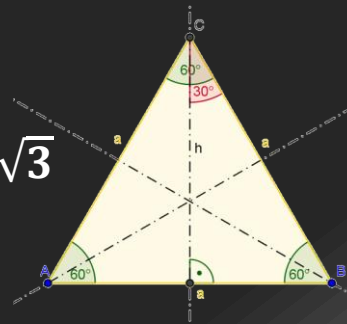
### • Gleichschenkliges Dreieck

Die Schenkel a sind gleich lang. [AB] heißt Basis. Die Höhe  $h_c$  halbiert den Winkel  $\gamma$ , die Basis [AB] und ist Symmetrieachse.



### • Gleichseitiges Dreieck

$$h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}; \quad A = \frac{a^2}{4} \cdot \sqrt{3}$$



Alle Seiten sind gleich lang, die Winkel betragen alle  $60^\circ$ . Die Höhe halbiert jeweils Seite und Winkel.

### • Rechtwinkliges Dreieck

Die Seite gegenüber des rechten Winkels heißt Hypotenuse, die beiden anderen Katheten.

- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen

## • Berechnungen in Dreiecken

### • Sätze am rechtwinkligen Dreieck

- Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck
- Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten

## • Skalarprodukt

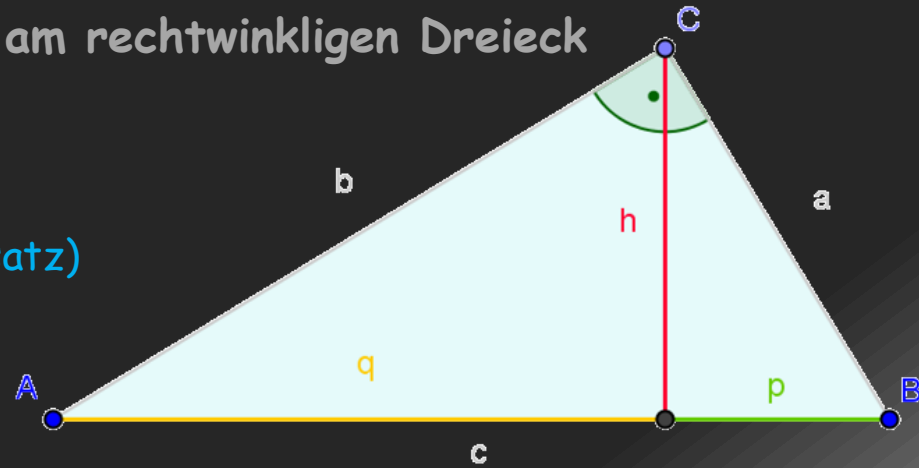


# Berechnungen in Dreiecken - Sätze am rechtwinkligen Dreieck

## Satzgruppe des Pythagoras

$$c^2 = a^2 + b^2; \quad h^2 = p \cdot q; \quad (\text{Höhensatz})$$

$$a^2 = c \cdot p; \quad b^2 = c \cdot q \quad (\text{Kathensatz})$$

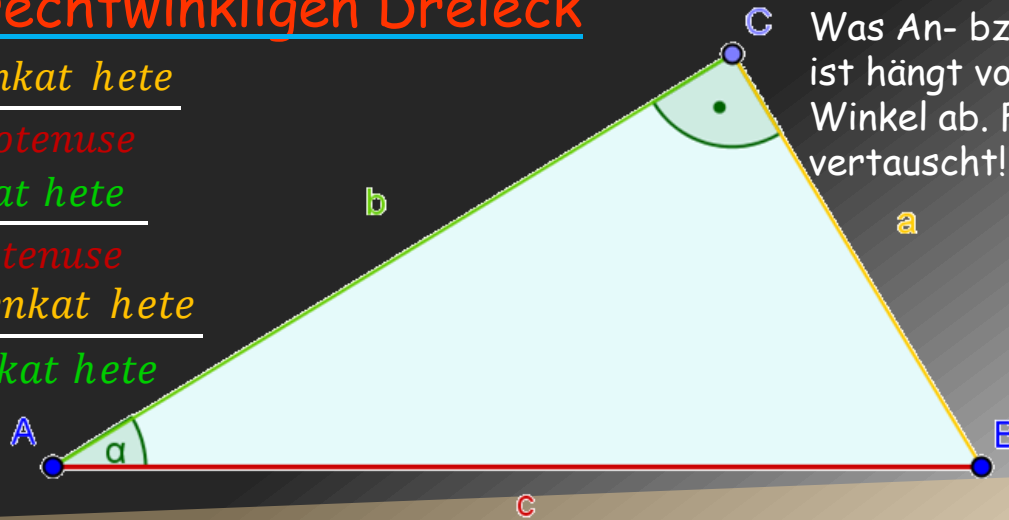


## Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} = \frac{\text{Gegenkat hete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} = \frac{\text{Ankat hete}}{\text{Hypotenuse}}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} = \frac{\text{Gegenkat hete}}{\text{Ankat hete}}$$



Was An- bzw. Gegenkathete ist hängt vom betrachteten Winkel ab. Für  $\beta$  sind diese vertauscht!

- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen
- **Berechnungen in Dreiecken**
  - Sätze am rechtwinkligen Dreieck
  - Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck
  - Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten
- Skalarprodukt



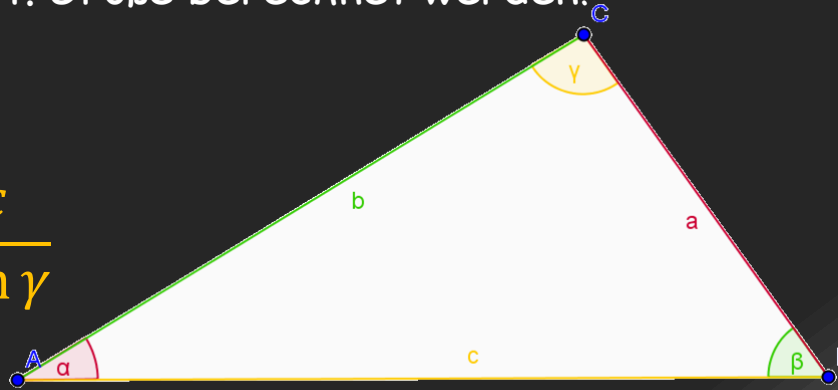
# Berechnungen in Dreiecken - Sinus- und Kosinussatz

Um auch in allgemeinen Dreiecken Winkel und Seiten berechnen zu können kannst du den Sinus- und Kosinussatz verwenden. Sie benötigen jeweils 4 Größen. Mit 3 bekannten, kann die 4. Größe berechnet werden!




## Sinussatz

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$



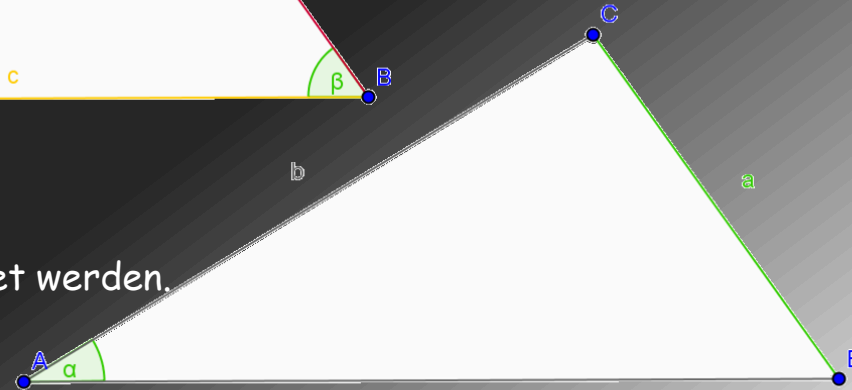
## Kosinussatz

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \alpha$$



Der Kosinussatz kann für jeden Winkel angewendet werden.  
Es liegt immer, die gesuchte Seite dem Winkel gegenüber.

Auch ein Winkel kann berechnet werden, wenn 3 Seiten bekannt sind.



- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen
- **Berechnungen in Dreiecken**
  - Sätze am rechtwinkligen Dreieck
  - **Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck**
  - Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten
- Skalarprodukt





# Berechnungen in Dreiecken -

## Funktionale Abhängigkeiten in der ebenen Geometrie

Funktionale Abhängigkeit kann heißen, dass ein oder mehrere Punkte auf einem Funktionsgraphen liegen und mit anderen Punkten Figuren bilden.

  $A \in f: y = \log_2(x + 8) + 1 \quad \Rightarrow \quad A_n = (x | \log_2(x + 8) + 1) *$

Oder es sind Vektoren in Abhängigkeit eines Winkels gegeben die Figuren, wie Parallelogramme, aufspannen.

$$\overrightarrow{OP_n} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \cos \varphi - 2 \\ 0,5 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{OR_n} = \begin{pmatrix} 3 \cdot \cos \varphi \\ -3 \cdot \sin \varphi \end{pmatrix} *$$

Mit diesen abhängigen Koordinaten kannst du rechnen wie mit konkreten Koordinaten.

\*[Beispiele aus der Abschlussprüfung 2009 in Mathematik an bayerischen Realschulen]

- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen
- **Berechnungen in Dreiecken**
  - Sätze am rechtwinkligen Dreieck
  - Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck
  - **Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten**
- Skalarprodukt

# Berechnungen in Dreiecken -

## Funktionale Abhängigkeiten in der ebenen Geometrie

Um diese Terme zu ermitteln musst du herkömmliche Formeln verwenden, aber statt konkrete Punkte oder Vektoren  $A_n$  oder  $\overrightarrow{OP_n}; \overrightarrow{OR_n}$  einsetzen.



Den jeweiligen Ansatz musst du dir aus der Situation heraus überlegen!

Weiter kann es sein dass ein Punkt  $A_n$  abgebildet wird und ein Bildpunkt berechnet werden muss. Dann wird  $A_n$  die Abbildungsgleichung eingesetzt.

**Bsp:**  $A_n(x|x^2 + 2x - 1) \xrightarrow{Z(-3|2)} B_n(x'|y')$   $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 2x_z \\ 2y_z \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x \\ x^2+2x-1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \end{pmatrix}$$
$$\begin{aligned} x' &= -x - 6 \\ y' &= -x^2 - 2x + 1 \end{aligned}$$

$$B_n(-x - 6 | -x^2 - 2x + 1)$$

- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen
- **Berechnungen in Dreiecken**
  - Sätze am rechtwinkligen Dreieck
  - Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck
  - **Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten**
- Skalarprodukt



# Berechnungen in Dreiecken -

## Funktionale Abhängigkeiten in der ebenen Geometrie



### Trägergraphen:

Ist ein Punkt in der Art  $B_n(-x - 6 | -x^2 - 2x + 1)$  gegeben

( $x$  - Koordinate ist nicht einfach  $x$ ) kann man den Trägergraphen ermitteln, das heißt die Kurve auf der alle Punkte  $B_n$  liegen.

1. Punkt als Gleichungssystem schreiben:

$$x' = -x - 6$$

$$y' = -x^2 - 2x + 1$$

2. Erste Zeile nach  $x$  auflösen

$$x = -x' - 6$$

3.  $x$  in zweite Zeile einsetzen

$$y' = -(-x' - 6)^2 - 2(-x' - 6) + 1$$

Der Trägergraph der Punkte  $B_n$  ist:  $y = -x^2 - 14x - 23$

- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen
- **Berechnungen in Dreiecken**
  - Sätze am rechtwinkligen Dreieck
  - Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck
  - **Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten**
- Skalarprodukt

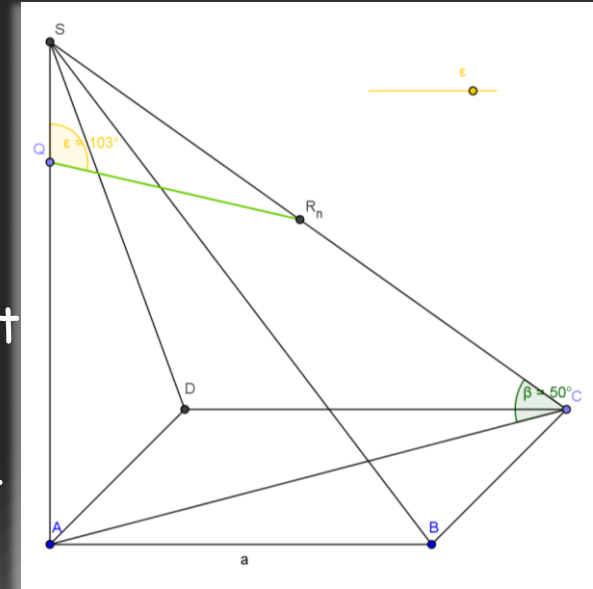


# Berechnungen in Dreiecken -

## Funktionale Abhängigkeiten in der räumlichen Geometrie

Hier wird in einem Körper, häufig einer Pyramide, eine **Strecke** festgelegt. Ihre Länge hängt von einem **Winkelmaß** ab.

Um den Term für die Streckenlänge in Abhängigkeit des Winkels zu bestimmen müssen Sätze am rechtwinkligen oder allgemeinen Dreieck angewandt werden, wobei der Winkel allgemein stehen bleibt.



**Bsp.:** siehe Aufgabe Pyramide

- Sinus, Kosinus, Tangens
- Trigonometrische Funktionen
- **Berechnungen in Dreiecken**
  - Sätze am rechtwinkligen Dreieck
  - Sinus- und Kosinussatz im beliebigen Dreieck
  - **Aufgaben aus der ebenen und räumlichen Geometrie mit funktionalen Abhängigkeiten**
- Skalarprodukt

