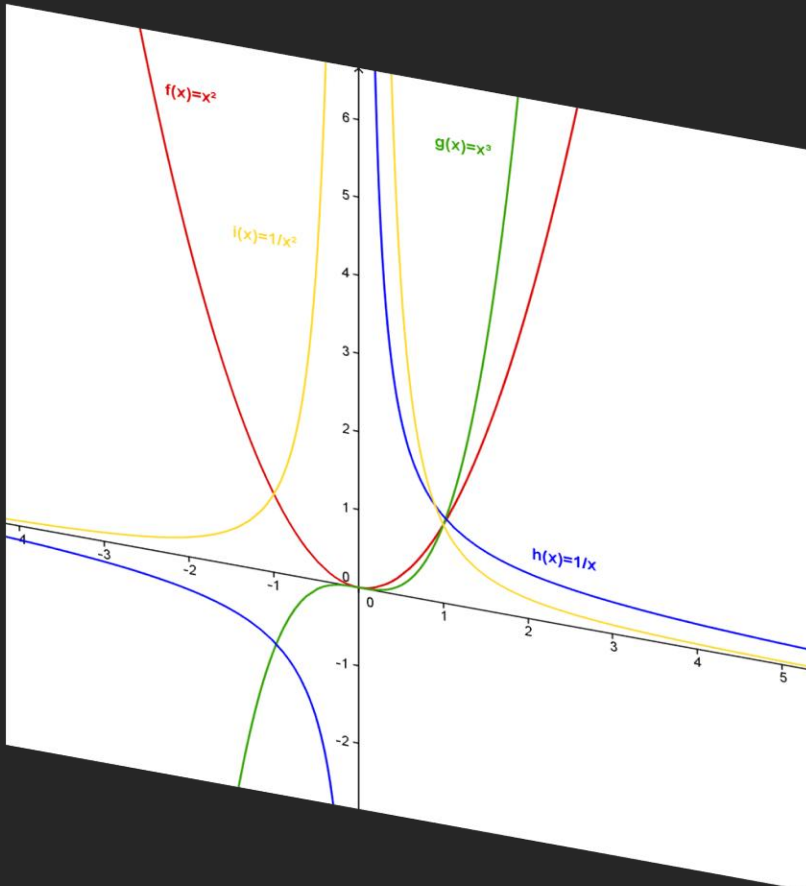


Potenzgesetze

$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; p, q \in \mathbb{Z}$

$\mathbf{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$

$\mathbf{\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}}$

$\mathbf{a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p}$

$\mathbf{\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p}$

$\mathbf{(a^p)^q = a^{p \cdot q}}$

Potenzen und Potenzfunktionen Abschnitt I

- Potenzen
- Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften
- Abbilden von Funktionsgraphen

Wie können Gleichungen der Form $x^n = \mathbf{a};\ \mathbf{a} \geqq \mathbf{0} \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}$ gelöst werden?

Wir benötigen die n-te Wurzel: $x = \sqrt[n]{a}$

Was ist, wenn $n \in \mathbb{Q}$ statt $n \in \mathbb{N}$?

($\mathbb{Q}$: rationale Zahlen; alle Brüche, auch negative
$\mathbb{N}$: natürliche Zahlen; $\{1; 2; 3; 4 \ldots + \infty\}$)

Es gelten Folgende Zusammenhänge:

$$a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}\,; \quad a^{\frac{p}{q}} = \left(\sqrt[q]{a}\right)^p \quad \text{mit } q \neq 0;\ \ q, p \in \mathbb{N}; a \in \{0; +\infty\}$$

Bsp.: $x^{\frac{3}{2}} = a \Leftrightarrow x = a^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{a}\right)^2$

- **Potenzen**
  - Zusammenhänge mit Wurzeln
  - Potenzgesetze
- Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften
- Abbilden von Funktionsgraphen

Um mit Potenzen rechnen zu können musst du die Potenzgesetze kennen:

$a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}; p, q \in \mathbb{Z}$

$$\mathbf{a^p \cdot a^q = a^{p+q}}$$

$$\mathbf{\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}}$$

$$\mathbf{a^p \cdot b^p = (a \cdot b)^p}$$

$$\mathbf{\frac{a^p}{b^p} = \left(\frac{a}{b}\right)^p}$$

$$\mathbf{(a^p)^q = a^{p \cdot q}}$$

Ein weiterer wichtiger Zusammenhang ist

$$\boldsymbol{a^{-p} = \frac{1}{a^p}}$$

Auch mit Wurzeln solltest du rechnen können

$$\boldsymbol{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a} \qquad a \in [0; +\infty[, b \in \ ]0; +\infty[$$

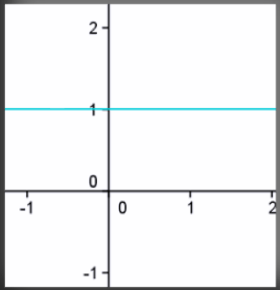
$$\boldsymbol{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}} \qquad \boldsymbol{\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}}$$

- **Potenzen**
  - Zusammenhänge mit Wurzeln
  - Potenzgesetze
- Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften
- Abbilden von Funktionsgraphen

Eine Potenzfunktion ist eine Funktion der Form: $f: x \longmapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}$

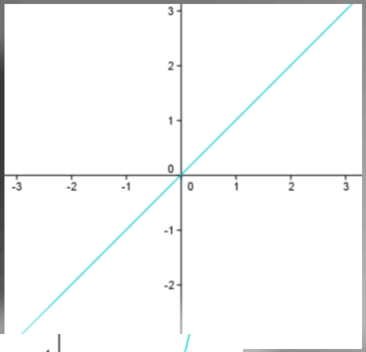
Für $n = 0$ ergibt sich $f(x) = x^0 = 1$

Diese Funktion heißt konstante Funktion



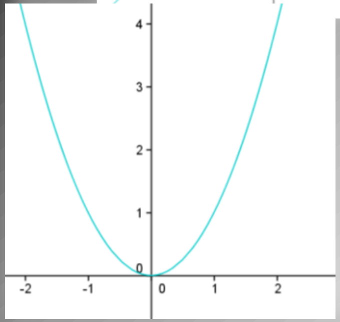
Für $n = 1$ ergibt sich $f(x) = x^1 = x$

Diese Funktion besitzt als Graph die Winkelhalbierende zwischen dem I. und III. Quadranten



Für $n = 2$ ergibt sich $f(x) = x^2$

Diese Funktion besitzt als Graph die Normalparabel



- Potenzen
- **Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften**
  - Definition Potenzfunktion
  - Sonderfall lineare Funktionen
  - Sonderfall quadratische Funktion
  - Potenzfunktionen
- Abbilden von Funktionsgraphen

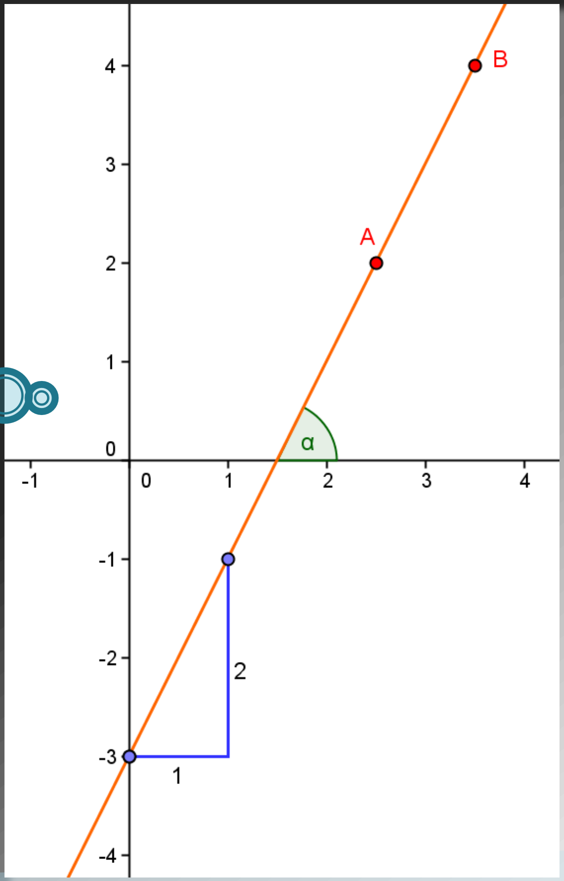
[EXKURS]: Lineare Funktionen (Geraden): $f\colon x \mapsto mx + t$ ← y-Achsen-Abschnitt

Steigung

$$y = mx + t \qquad \mathbb{D} = \mathbb{R};\quad \mathbb{W} = \mathbb{R}$$

Bsp.: $y = 2x - 3$

Für die Zeichnung trägst du t auf der $y-Achse$ an und bildest das Steigungsdreieck, wobei gilt: $m = \frac{y}{x}$ also im Beispiel $m = \frac{2}{1}$.

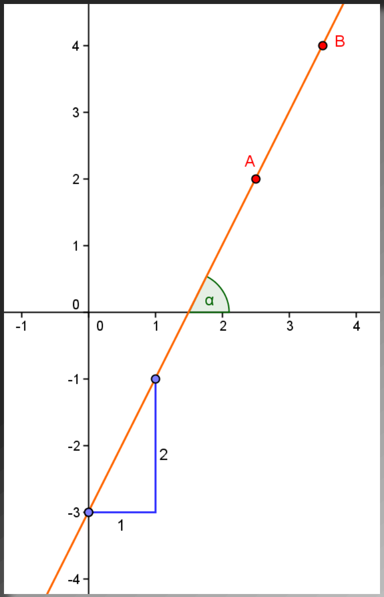


Um zu sehen, wie sich Steigung und y-Achsen-Abschnitt auswirken probiere das GeoGebra-Applet-Lineare Funktionen aus

- Potenzen
- **Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften**
  - Definition Potenzfunktion
  - [Exkurs] lineare Funktionen
  - [Exkurs] quadratische Funktion
  - Potenzfunktionen
- Abbilden von Funktionsgraphen

[EXKURS]: Lineare Funktionen (Geraden): $f: x \mapsto mx + t$ ← y-Achsen-Abschnitt

↑ Steigung



Nullstellen: $y = 0 \qquad 0 = 2x - 3 \Leftrightarrow x = 1\frac{1}{2}$

Schnittpunkt zweier Geraden: Gleichsetzen

Steigung: $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \tan\alpha$

Gleichung bei zwei bekannten Punkten ermitteln:

m mit $m = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ ermitteln und in Gleichung einem mit Punkt einsetzen

oder Gleichungssystem aufstllen in dem zwei Punkte eingesetzt werden

[EXKURS]: Quadratische Funktionen (Parabeln): $f: x \longmapsto ax^2 + bx + c$ $\quad a, b, c \in \mathbb{R}$

Normalform $y = ax^2 + bx + c \quad \mathbb{D} = \mathbb{R}$

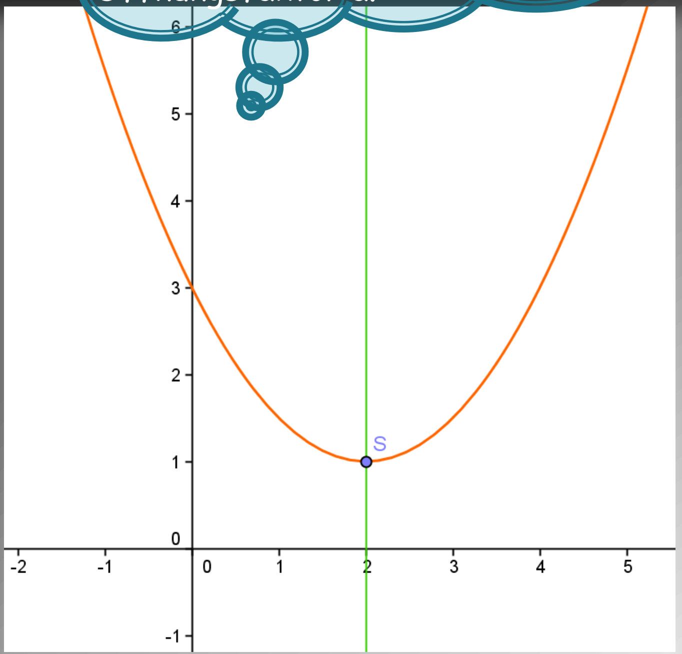
Binomische Formel

quadr. Ergänzung

Scheitelform $y = (x - x_S)^2 + y_S$

Für die Zeichnung kannst du eine Wertetabelle erstellen oder den Scheitel ermitteln und von ihm aus Werte antragen, je nach Öffnungsfaktor a.

Bsp.: $y = 0{,}5x^2 - 2x + 3 = 0{,}5(x-2)^2 + 1$



Scheitel: $S(x_S|y_S)$

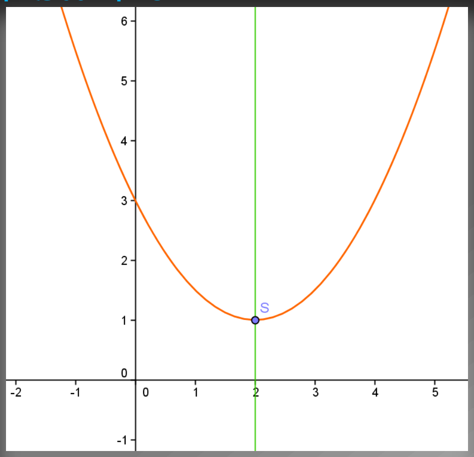
Symmetrieachse: $s = x_S$

Wertemenge: $\mathbb{W} = \{y|y \geqq y_S\}$ für $a < 0$

$\mathbb{W} = \{y|y \leqq y_S\}$ für $a > 0$

- Potenzen
- **Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften**
  - Definition Potenzfunktion
  - [Exkurs] lineare Funktionen
  - [Exkurs] quadratische Funktion
  - Potenzfunktionen
- Abbilden von Funktionsgraphen

[EXKURS]: Quadratische Funktionen (Parabeln): $f: x \longmapsto ax^2 + bx + c$



Nullstellen: $y = 0$ $\quad 0 = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow$

$$x_{1/2} = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$ (allg. Lösungsformel)

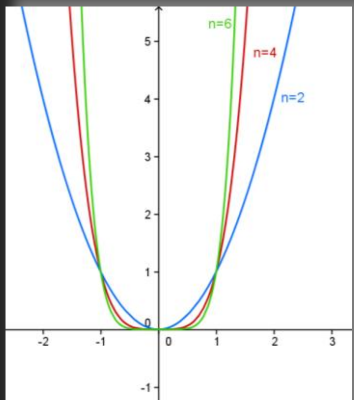
Gleichung bei zwei bekannten Punkten und a ermitteln:

Gleichungssystem mit $y = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow$ aufstellen, a und die beiden Punkte einsetzen.

Um zu sehen, wie sich Öffnungsfaktor a die Parameter b und c auf die Prabel auswirken probiere das GeoGebra-Applet „Quadratische Funktionen" aus

Potenzfunktionen mit ganzzahligen Exponenten: $f: x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}$

$n \in \mathbb{N}; n$ gerade

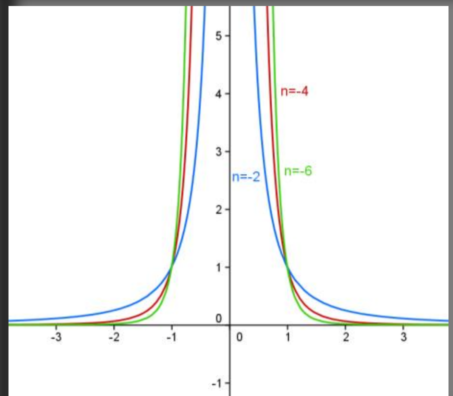


$\mathbb{D} = \mathbb{R};\ \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

Scheitelpunkt $S(0|0)$

achsensymm. Parabel

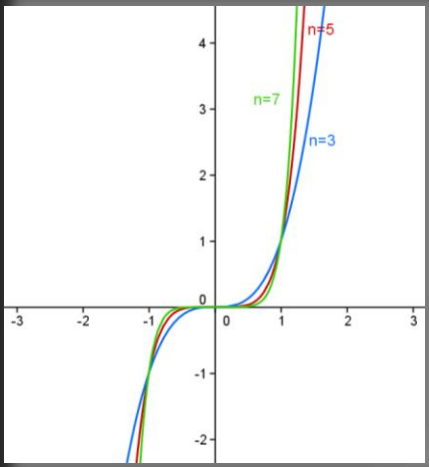
$n \in \mathbb{Z}^-; n$ gerade



$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\};\ \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

achsensymm. Hyperbel

$n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}; n$ ungerade

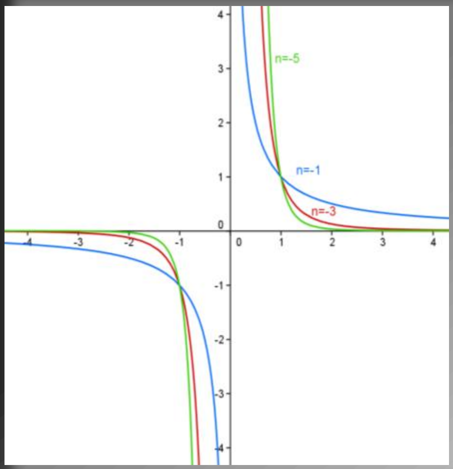


$\mathbb{D} = \mathbb{R};\ \mathbb{W} = \mathbb{R}$

Symmetriepunkt $S(0|0)$

punktsymm. Parabel

$n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}; n$ ungerade



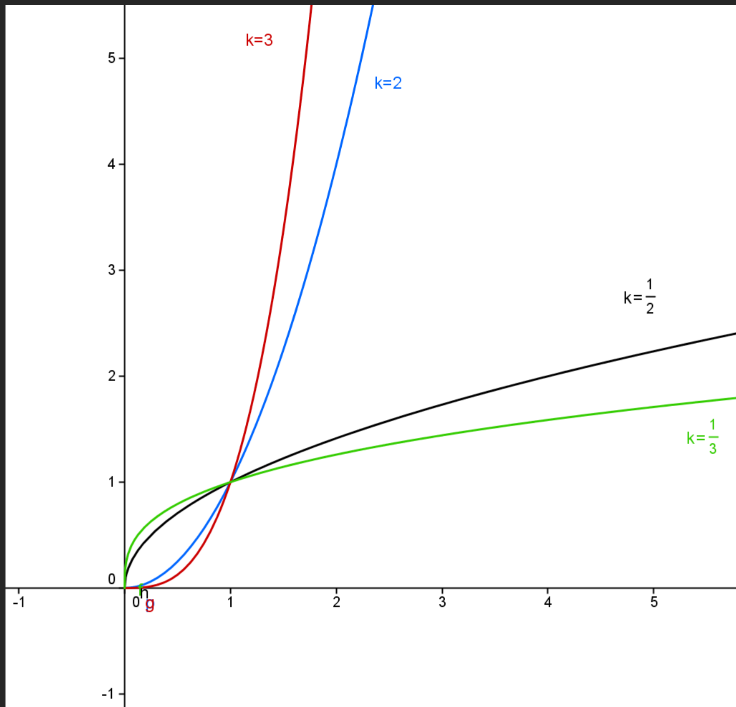
$\mathbb{D} = \mathbb{R}\backslash\{0\};\ \mathbb{W} = \mathbb{R}\backslash\{0$

punktsymm. Hyperbel

Um die Eigenschaften der Potenzfunktionen zu erkennen benutze das GeoGebra-Applet „Potenzfunktionen“ aus.

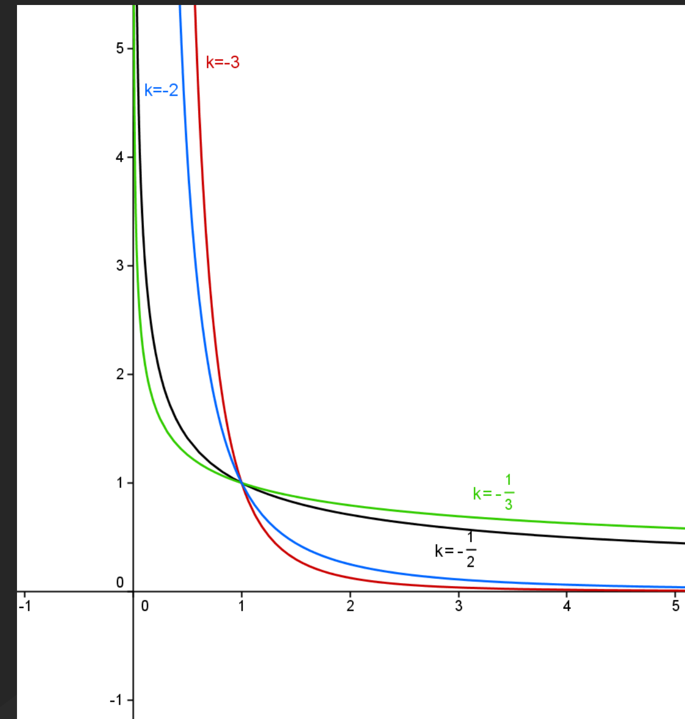
Potenzfunktionen mit rationalen Exponenten: $f: x \longmapsto x^n \quad n \in \mathbb{Q}$

$k \in \mathbb{Q}^+$



$\mathbb{D} = \mathbb{R}_0^+;\ \mathbb{W} = \mathbb{R}_0^+$

$k \in \mathbb{Q}^-$



$\mathbb{D} = \mathbb{R}^+;\ \mathbb{W} = \mathbb{R}^+$

Bedenke, $x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$, so ist $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$ die Umkehrfunktion zu $g(x) = x^2$

- Potenzen
- **Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften**
  - Definition Potenzfunktion
  - [Exkurs] lineare Funktionen
  - [Exkurs] quadratische Funktion
  - Potenzfunktionen
- Abbilden von Funktionsgraphen

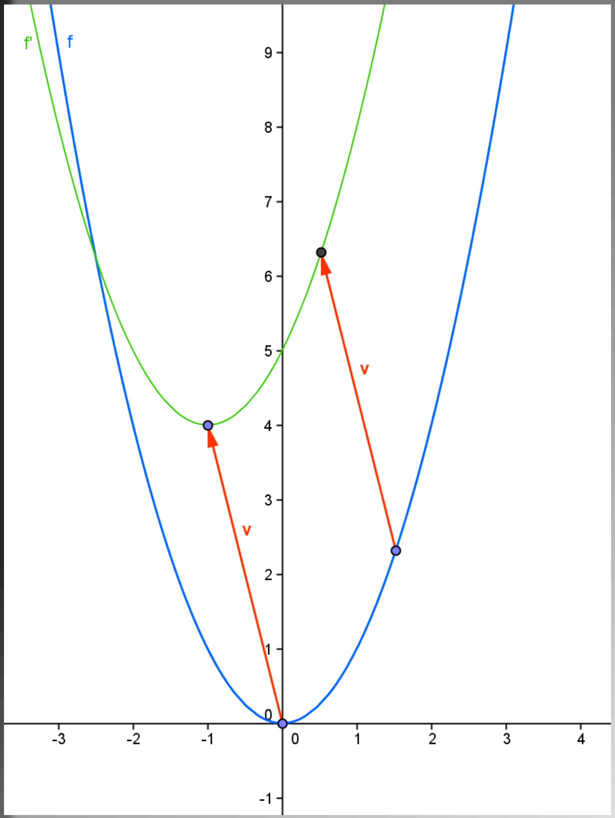
Parallelverschiebung einer Potenzfunktion $f: x \longmapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}$

$$f: y = x^n \xrightarrow{\vec{v}=\binom{c}{d}} f': y = (x-c)^n + d \qquad c, d \in \mathbb{R}$$

Jeder einzelne Punkt wird mit dem Vektor $\vec{v} = \binom{c}{d}$ verschoben. Die neue Funktionsgleichung erhältst du, wenn du c von x abziehst und insgesamt ein d addierst.

Bsp.: $f: y = x^2 \xrightarrow{\vec{v}=\binom{-1}{4}} f': y = (x+1)^2 - 4$

In diesem Beispiel erhältst du eine verschobene Normalparabel in Scheitelform.

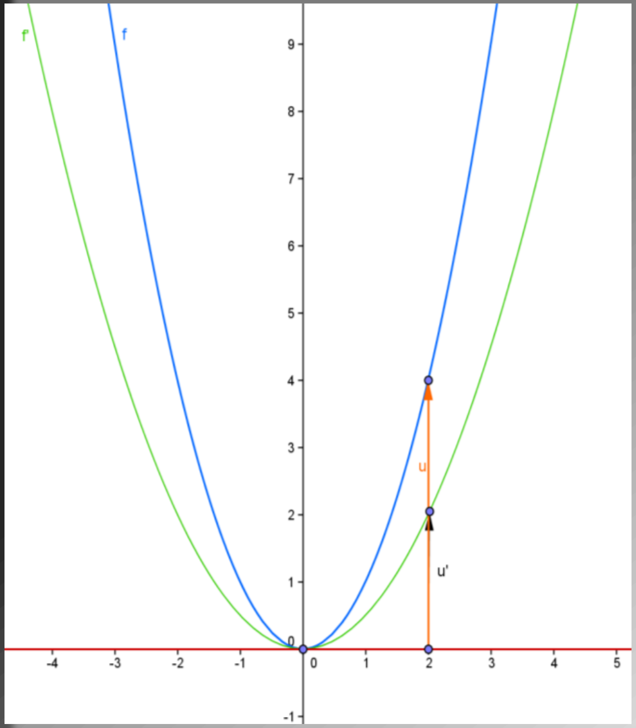


- Potenzen
- Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften
- **Abbilden von Funktionsgraphen**
  - Prallelverschiebung
  - Orthogonale Affinität
  - Achsenspiegelung

Abbildung einer Potenzfunktion durch orthogonale Affinität mit der $x-Achse$

$$f: y = x^n \xrightarrow{x-Achse;k} f': y = k \cdot x^n \qquad k \in \mathbb{R}$$

Die y-Koordinaten der einzelnen Punkte werden mit dem Faktor k multipliziert.



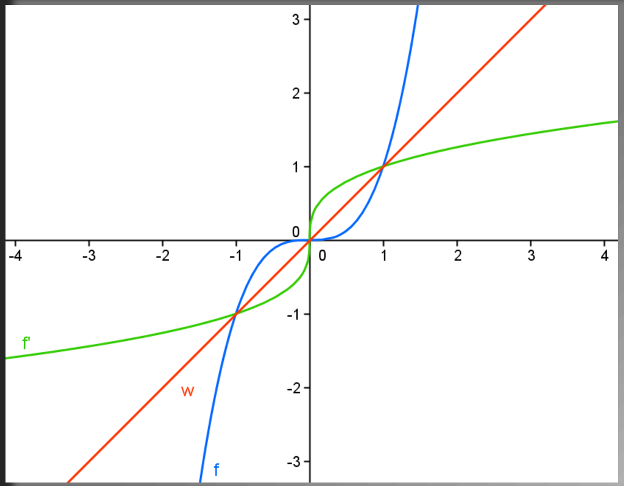
Bsp.: $f: y = x^2 \xrightarrow{x-Achse;k=\frac{1}{2}} f': y = \frac{1}{2}\,x^2$

In diesem Beispiel wird der Öffnungsfaktor der Normalparabel verändert.

Achsenspiegelung einer Potenzfunktion $f: x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}$

$$f: y = x^n \xrightarrow{a: y=x} f': x = y^n \Leftrightarrow y = \sqrt[n]{x}$$

Bei einer Achsenspiegelung an der Winkelhalbierenden des I. und III. Quadranten ($y = x$) erhält man die Umkehrfunktion.
Durch vertauschen von x und y und auflösen nach y erhält man die Funktionsvorschrift.



$$f: y = x^n \xrightarrow{y-Achse} f': y = (-x)^n$$

Bei einer Achsenspiegelung an der y-Achse gilt:

$$f'(x) = f(-x)$$

Die einzelnen Abbildungen können auch hintereinander ausgeführt werden. Probier es mit dem GeoGebra-Applet „Abbildungen“ aus.

- Potenzen
- Potenzfunktionen und ihre Eigenschaften
- **Abbilden von Funktionsgraphen**
  - Prallelverschiebung
  - Orthogonale Affinität
  - Achsenspiegelung