Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt

Durchführung in einem Pluskurs

Dieser Pluskurs bietet eine gute Möglichkeit den Schülern die Fibonacci-Zahlen und den goldenen Schnitt näher zu bringen. Im Vordergrund steht hierbei die Begeisterung an der Mathematik zu wecken und vielfältige Anwendungsmöglichkeiten aufzuzeigen. Dies lässt sich besonders gut in Stationenarbeit durchführen.

Die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt

Da die Fibonacci-Zahlen und der goldene Schnitt eine wichtige Rolle in der Natur und in der Kunst spielen, möchten wir die Schüler an das Thema heranführen und die vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten aufzeigen und somit hoffentlich ihre Begeisterung für die Mathematik weiter zu steigern.

Durchführung der Stunde

1.) Einstieg: Filmausschnitt Sakrileg
2.) Theorieteil: kurze Einführung in die Fibonacci-Zahlen und den goldenen Schnitt in Form von Klassenunterricht, unterstützt durch einen Tafelanschrieb
3.) Aufgaben: Vertiefung und Veranschaulichung der Theorie durch vielseitige Aufgaben, die in Stationenarbeit als Zweiergruppen zu bearbeiten sind

Einstieg:

In dem Film „Sakrileg" findet Professor Langdon folgenden Code bei einer Leiche:

„13 3 2 21 1 1 8 5
O DRACONIAN DEVIL!
OH LAME SAINT!"

Er stellt fest, dass es sich bei der Zahlenreihe um Fibonacci-Zahlen handelt, welche allerdings in einer falschen Reihenfolge angeordnet sind. Dies lässt ihn darauf schließen, dass auch die Buchstaben falsch angeordnet sind und so erhält er durch Knobeln folgende Lösung:

„1 1 2 3 5 8 13 21
LEONARDO DA VINCI!
THE MONA LISA!"

http://www.youtube.com/watch?v=-t-G2M_Owg4

Theorieteil:

Fibonacci-Zahlen

Seit der Antike war die Zahlenfolge: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … bekannt. Im 13. Jahrhundert beschäftigte sich Leonardo von Pisa (genannt: Fibonacci –Sohn des Bonacci) etwas ausführlicher damit, so dass sie später auch nach ihm benannt wurde.

Wie sich anhand der ersten Glieder leicht feststellen lässt, erhält man das nächste Folgenglied durch Addition der beiden vorhergehenden Folgenglieder. Mathematisch lässt sich dies durch eine sogenannte Rekursionsvorschrift ausdrücken.

Die Rekursionsformel der Fibonacci-Zahlen lautet: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ mit $f_0 = f_1 = 1$

Durch den Index werden die Folgenglieder nummeriert. Ihre Reihenfolge also eindeutig festgelegt. Die Rekursionformel gibt also an, dass man das n-te Folgenglied $f_n$durch Addition seiner beiden Vorgänge f_{n-1} und f_{n-2} erhält.

Der Vorteil der Rekursionsformel ist, dass man auf den ersten Blick sieht, wie die Folge aufgebaut ist, allerdings ist es sehr aufwendig Folgenglieder mit großem Index zu berechnen. (Selbst Computer brauchen hierfür sehr lange…).
Deswegen gibt es auch eine sogenannte explizite Darstellung für Folgen, die es uns ermöglicht das n-te Folgenglied direkt zu berechnen, ohne seine Vorgänger und Startwerte zu kennen.

<u>Beispiel:</u>

Die Zahlenfolge: 0, 1, 2, 3, … lässt sich wie folgt beschreiben:

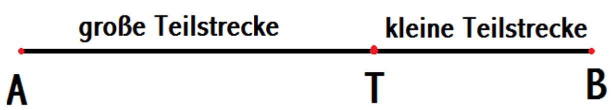
$$rekursiv: a_n = a_{n-1} + 1 \; mit \; a_0 = 0$$

$$explizit: a_n = n$$

Die explizite Darstellung der Fibonacci-Folge können die Schüler in der Stationenarbeit kennenlernen.

Der goldene Schnitt

Beim goldenen Schnitt teilt ein Punkt eine Strecke in einem bestimmten Teilungsverhältnis. Welches sich wie folgt beschreiben lässt:



Hierbei gilt:

$$\frac{ganze\ Strecke}{große\ Teilstrecke} = \frac{große\ Teilstrecke}{kleine\ Teilstrecke}$$

Dieses Teilverhältnis wird im Allgemeinen als besonders Ästhetisch empfunden, deshalb findet der goldene Schnitt große Anwendung in Kunst und Architektur.

Zur Berechnung des Wertes dieses Bruches nehmen wir nun an, dass unsere ganze Strecke den Wert 1 hat. Die große Teilstrecke wird mit x bezeichnet.

Dann gilt:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Durch Ausmulitplizieren erhält man die quadratische Gleichung: $x^2 + x - 1 = 0$

Mit der Mitternachtsformel folgt: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. Wobei wir nur den positiven x-Wert betrachten, da x die Länge unserer großen Teilstrecke darstellt.

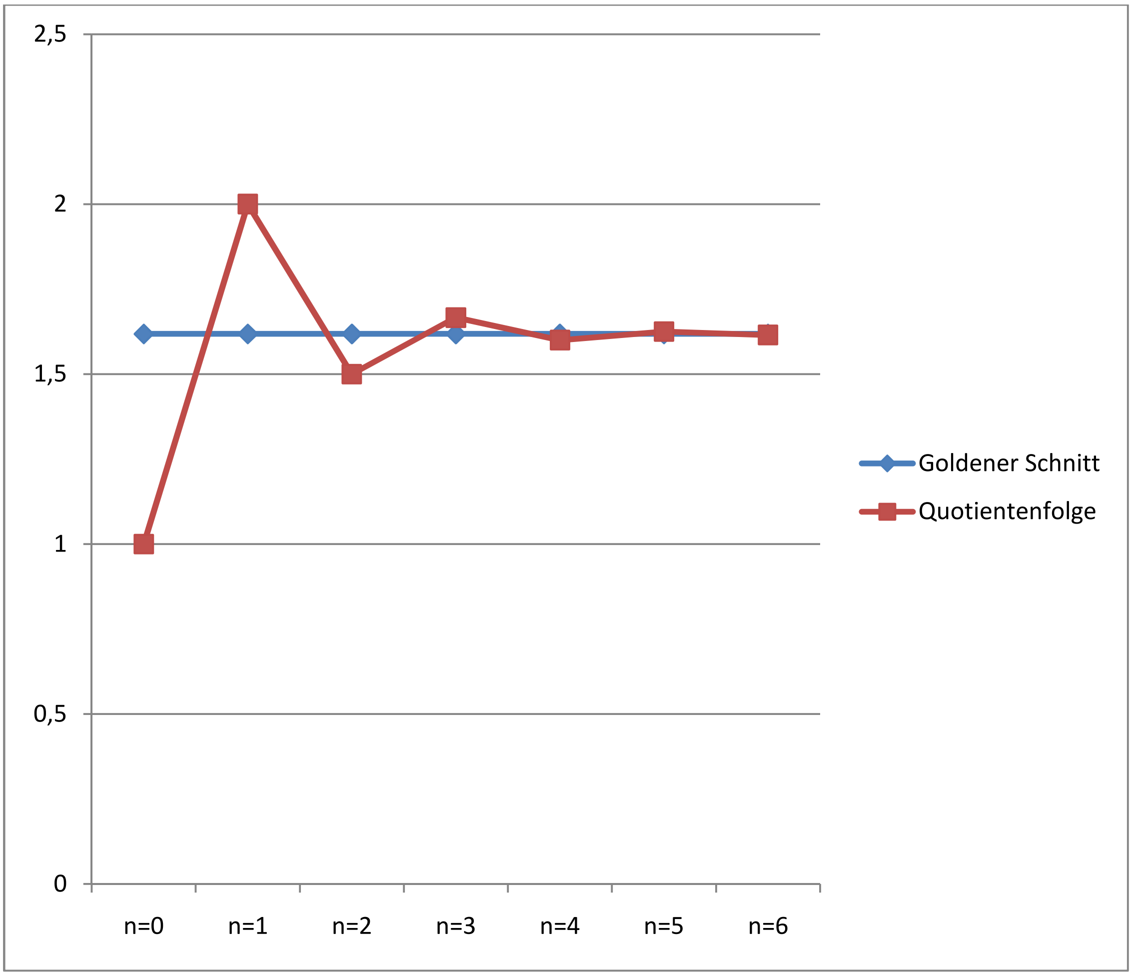
Betrachten wir nun das Verhältnis, so gilt: $\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$

Der goldene Schnitt erfüllt also folgende Gleichungen:

1.) $x^2 - x - 1 = 0$
2.) $1 - x = \frac{1}{x}$

Zusammenhang mit den Fibonacci-Zahlen
Der goldene Schnitt kann durch die Quotientenfolge zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen angenähert werden:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \dots \frac{f_{n+1}}{f_n}$$



Aufgaben

Zur Vertiefung sollen Aufgaben in Form einer Stationenarbeit gelöst werden. Die unterschiedlichen Stationen wurden im Klassenzimmer verteilt und mit Schildern gekennzeichnet. Auf den Schildern werden die Aufgaben der Stationenarbeit mit 1-3 Sternen markiert.
Die Sterne stehen für den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe (1-leicht, 2-mittel, 3-schwer).
Des Weiteren gibt es Informationsstationen, bei denen es Interessantes und Wissenswertes zum Thema nachzulesen gibt.
Die Schüler dürfen selbstständig wählen, welche Aufgaben sie bearbeiten möchten, und dürfen sich dazu die Zeit frei einteilen. Dazu nehmen sie sich ein Angabenblatt (welches in ausreichender Stückzahl an der Station ausliegt) mit an ihren eigenen Arbeitsplatz, sodass mehrere Gruppen eine Aufgabe parallel bearbeiten können. In wenigen Ausnahmefällen werden weiterführende Materialien benötigt, so dass die Aufgabe immer nur von einer Gruppe an der Station ausgeführt werden kann.
Es wird keineswegs erwartet, dass ein Schüler jede Aufgabe bearbeitet. Ziel ist hier die Begeisterung an der Mathematik und der Einblick in die Anwendungsmöglichkeiten. Darum sind die Aufgaben unabhängig voneinander, so dass keine Lücken entstehen, insofern nicht alle Aufgaben bearbeitet wurden.
Für Theorie und Stationenarbeit werden mindestens eine Doppelstunde (90min) benötigt. Sollte darüber hinaus noch Zeit zur Verfügung stehen, können die Lösungen von den Schülern selbst vor der ganzen Gruppe präsentiert werden. Dabei lernen die Schüler vor Publikum über mathematische Probleme und ihre Lösungsansätze zu sprechen. Andernfalls, erhält jeder Schüler nach Abschluss einer Station das zugehörige Lösungsblatt mit dem er seine Lösung vergleichen kann.
Sollten die Schüler beim Bearbeiten einer Station nicht weiterkommen, so gibt es die Möglichkeit sich beim Lehrer einen Tipp einzuholen.

Für die Aufgaben werden zu Stift und Papier folgende **Materialien** benötigt:

- Maßband, Meterstab, Tabelle
- Ananas, Kiefernzapfen, (echte) Sonnenblume,
- falls vorhanden: Goldener Zirkel, Tonpapier, Musterklammer (Flachkopfklammer), Schere, Bild z.B. Selbstporträt von Dürer, Mona Lisa …
- Goldenes Rechteck aus Tonpapier
- Tabelle der Fibonacci-Zahlen
- Keyboard mit Kopfhörern, CD-Player, evtl. Geige

AUFGABE 1 Treppensteigen

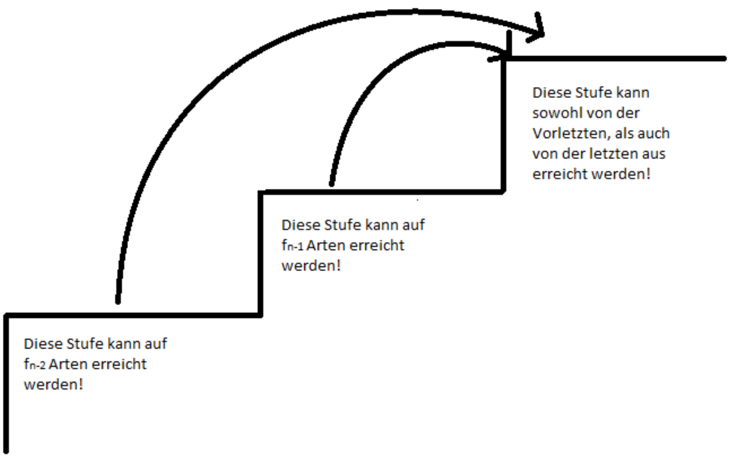
Ein Briefträger stellt in einem Hochhaus, in dessen Treppenhaus sich enorm viele Stufen befinden jeden Tag die Post zu. Nachdem er die erste Stufe betreten hat, kann er sich bei jeder Stufe entscheiden, ob er um schneller ans Ziel zu kommen die nächste Stufe überspringt oder sie ganz normal betritt, was weniger Kraft kostet. Auf wie viele verschiedene Arten kann er die fünfte, die achte und die n-te Stufe erreichen?

Tipp:

Stelle dir vor, du stehst auf der 5. Stufe. Von welchen Stufen konntest du diese erreichen?

Lösung:

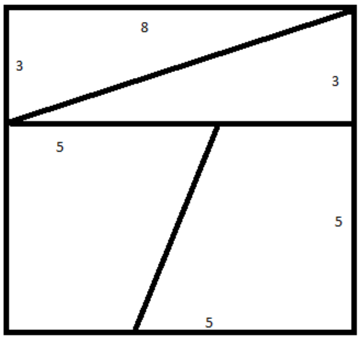
Um die ersten beiden Stufen zu erreichen, hat der Briefträger jeweils genau eine Möglichkeit, da er laut Voraussetzung die erste Stufe nicht überspringen darf. Die dritte Stufe kann er von der zweiten Stufe aus oder von der ersten unter Auslassung der zweiten erreichen, also auf eine Art für die erste und eine Art für die zweite Variante, insgesamt also auf zwei Arten. Die vierte Stufe lässt sich von der zweiten, also auf eine Art oder von der dritten aus betreten, welche sich ihrerseits auf zwei Arten erreichen lässt, insgesamt ergeben sich für die vierte Stufe also drei Möglichkeiten. Dies lässt sich nun so fortführen. Die Anzahl der Möglichkeiten vor die n-te Stufe ergibt sich immer aus der Addition der Möglichkeiten für die beiden Vorgängerstufen. Mit den Startwerten 1 für die beiden ersten Stufen ergibt sich somit die Fibonacci-Folge, also f_n Möglichkeiten für die n-te Stufe und insbesondere also f_5=8 Möglichkeiten um die fünfte Stufe zu betreten.

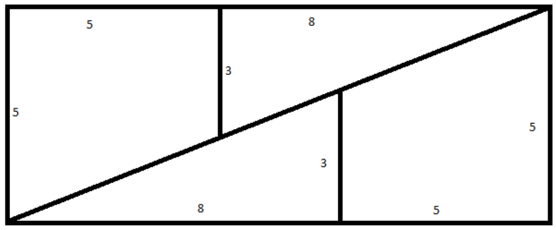


Für die, die es schon kennen: Vergleiche Induktionsprinzip!

AUFGABE 2 64=65?

Das unten abgebildete Quadrat mit Seitenlänge acht LE hat offensichtlich den Flächeninhalt FE. Durch umlegen der Einzelteile erhält man das darunter abgebildete Rechteck, mit den Seitenlängen 13 LE und 5 LE, also 65 FE. Finde den Fehler und überlege, ob selbiger Trick noch für andere Zahlenpaare funktioniert.



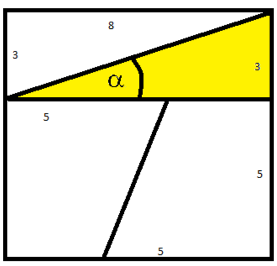


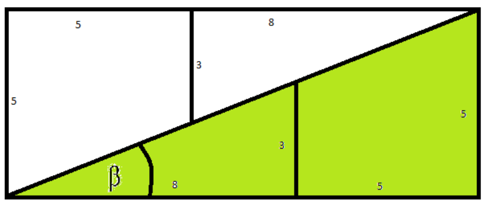
Tipps:

- Bastle das Quadrat exakt nach den Angaben nach.
- Schneide die Einzelteile auf und lege sie zum Rechteck zusammen.
- Wähle einen größeren Maßstab.

Lösung:

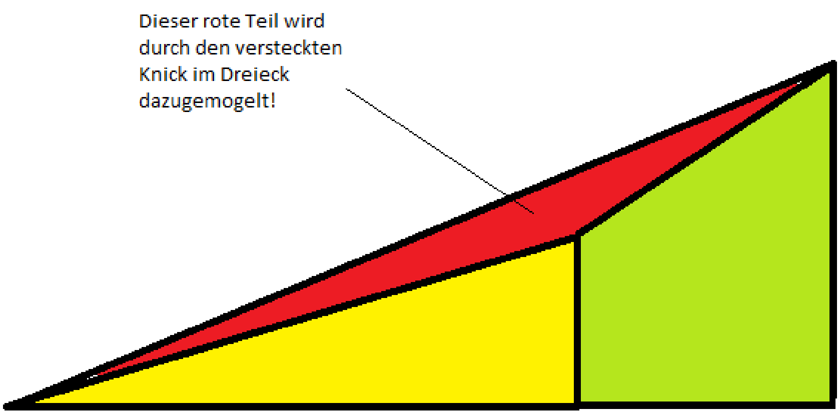
Wir betrachten die beiden rechtwinkligen Dreiecke im Quadrat mit den Kathetenlägen 8 und 3, also dem Kathetenverhältnis $\frac{8}{3}=2,\overline{6}$. Vergleicht man dieses mit dem Kathetenverhältnis im großen, „zusammengesetzten" Dreieck, so zeigt sich, dass für dieses $\frac{13}{5}=2{,}6$ gilt.





Anwendung des Tangens auf den jeweiligen Kehrwert zeigt, dass die Winkel nicht gleich groß sind. Bei der Umgruppierung entsteht also kein großes Dreieck, in Hypotenuse entsteht tatsächlich ein

„Knick“, durch welchen zwischen den zwei großen angeblichen Dreiecken ein Stückchen Fläche dazu gemogelt wird, welchen den Flächeninhalt 1 hat.



Wenn einem der Tangens nicht bekannt ist, kann man auch über die Ähnlichkeit von Dreiecken argumentieren. Da der rechte Winkel erhalten bleibt, wären die beiden Dreiecke genau dann ähnlich, wenn der Streckungsfaktor um den die Katheten gestreckt wurden gleich ist. Das ist nach obiger Rechnung nicht der Fall. Daraus kann man ableiten, dass der spitzere Winkel des großen Dreiecks ein anderer sein müsste als der des kleinen, bzw. da dieser ja tatsächlich identisch ist, ein Knick in der dem rechten Winkel gegenüberliegenden Seite vorliegen muss.

Dieser Trick funktioniert mit z.B. auch mit 168=169, wobei hier ein Stück des Rechtecks unterschlagen wird. Allgemein eignen sich die Fibonacci-Zahlen, da die Summe zweier aufeinanderfolgender immer die nächste ergibt, also die Seitenläge des Quadrats und des Rechtecks so konstruierbar sind und außerdem, wie bei der Herleitung des goldenen Schnitts gezeigt, der Quotient zweier direkt aufeinanderfolgender Fibonaccizahlen zwar nicht den exakt gleichen Wert wie der Quotient des Vorgängerpaares hat, der Unterschied jedoch sehr gering ist und damit fürs Auge bei geschickter Zeichnung nicht erkennbar.

AUFGABE 3 Teilerfremdheit

Beweise, dass je zwei aufeinander folgende Fibonaccizahlen f_n und f_{n+1} teilerfremd sind, also ihr größter gemeinsamer Teiler 1 ist.

Tipp:

- Versuche ein Widerspruchsbeweis. Nehme also an, es existiert ein solches Paar benachbarter Fibonaccizahlen, die nicht teilerfremd sind.
- Überleg dir, welche Zahl auf jeden Fall auch durch den ggT von $f_n \text{ und } f_{n-1}$ geteilt wird.
- Beachte die Startwerte der Fibonacci-Folge.

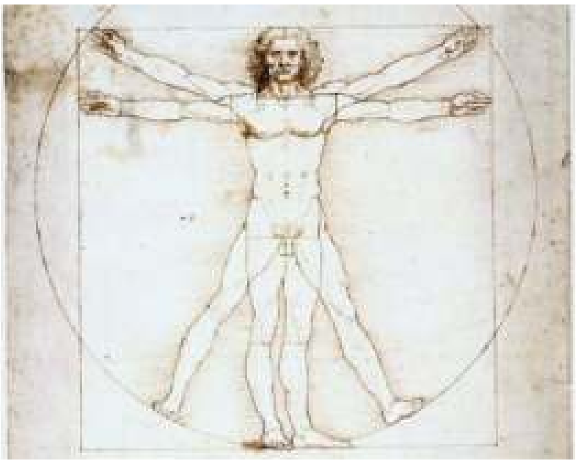
Lösung:

Annahme: Es existiert ein solches Paar von benachbarten Fibonaccizahlen f_n und f_{n-1}, welche nicht teilerfremd sind, die also einen gemeinsamen Teiler d>1 besitzen.

Also teilt d auch die Differenz $d \mid f_n - f_{n-1}$ und damit $d \mid f_{n-2}$. Als gemeinsamer Teiler von f_{n-1} und f_{n-2} teilt d wiederum deren Differenz $d \mid f_{n-1} - f_{n-2}$ also auch $d \mid f_{n-3}$ und so weiter.

Nach endlich vielen Schritten erhält man $d \mid f_2 = 1$, also gilt d=1 im Widerspruch zur Annahme

AUFGABE 4 Goldener Schnitt an unserem Körper



Der goldene Schnitt findet sich immer wieder in der Natur, so auch am menschlichen Körper. Nehmt auch das Maßband und versucht den goldenen Schnitt an euch selbst zu finden und tragt eure Messwerte in die Tabelle ein. Gibt es Punkte, die bei allen Menschen den Körper oder Körperteile im goldenen Schnitt teilen?

Macht euch eine eigene Tabelle und tragt in die ausliegende nur die Teilverhältnisse ein.

Lösung:

Gemessene Strecke	**Teilungspunkt**	**Teilverhältnis (groß:klein)**	**Mittelwert Teilverhältnisse**
Gesamtkörpergröße	Bauchnabel	1,62; 1,60; 1,61	1,61

Vorschläge

- Der Bauchnabel teilt die Körpergröße im goldenen Schnitt
- Das Knie teilt die Strecke Fuß-Bauchnabel im GS
- Schulterlinie teilt Scheitel-Nabel im GS
- Ellenbogen den Arm

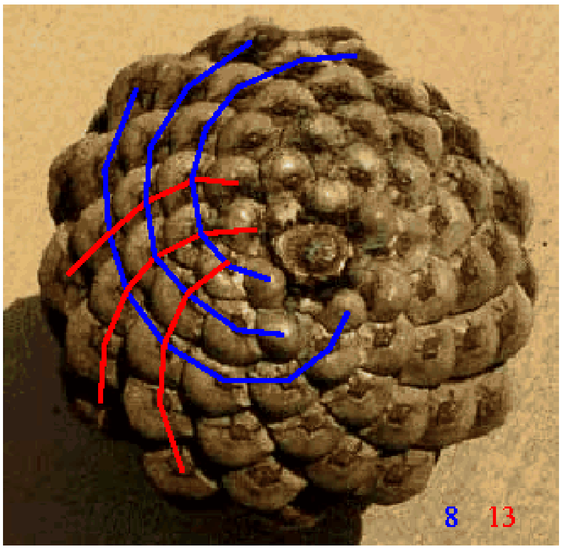
AUFGABE 5 Die Fibonacci-Zahlen in der Natur

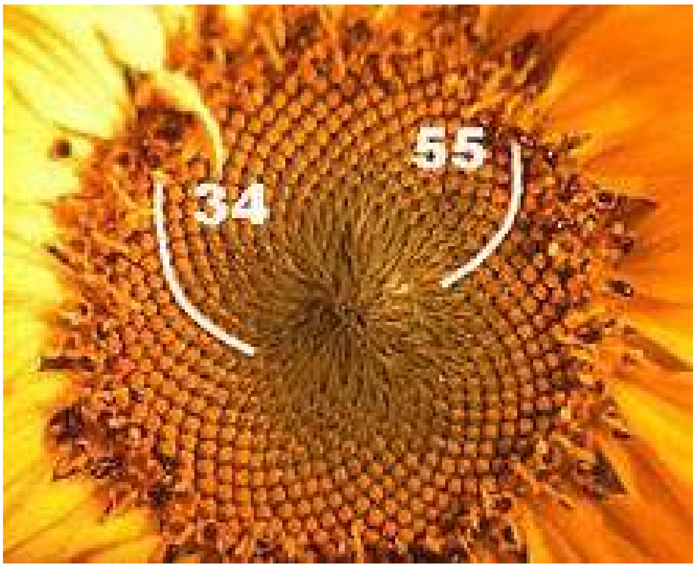
In der Kiste findet ihr verschiedene Naturprodukte. Schaut sie euch sehr genau an und versucht die Fibonacci-Folge an ihnen zu finden.

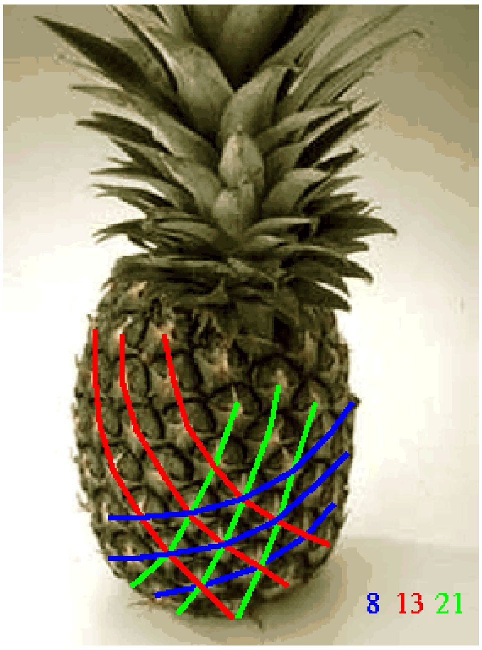
Tipp:

Suche Spiralen.

Lösung:







AUFGABE 6 Kaninchenaufgabe

Ein neugeborenes Kaninchenpaar ist nach einem Monat geschlechtsreif und wirft also ab dem zweiten Monat jeden Monat ein neues Kaninchenpaar, welches wiederum nach einem Monat geschlechtsreif ist und wiederum ein Paar Junge wirft. Berechne die Anzahl der Kaninchenpaare am Ende des 10. Bzw. n-ten Monats unter der Annahme, dass die Kaninchen unsterblich sind und pro Wurf immer ein Männchen und ein Weibchen zur Welt kommen.

Tipp:

- Schreibe eine Tabelle mit der Anzahl der Kaninchen pro Monat.

Lösung:

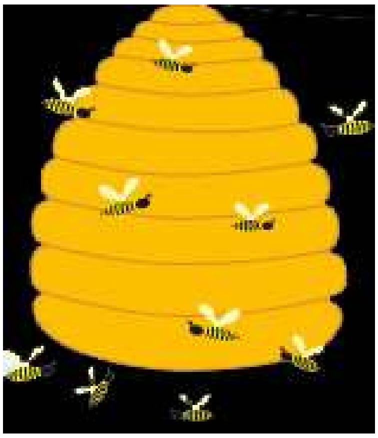
Anhand dieser Aufgabe leitete Leonardo da Pisa, auch Fibonacci genannt, im Jahre 1202 seine berühmte Zahlenfolge her.

Im ersten und zweiten Monat lebt nur unser Anfangspaar, welches im dritten Monat zum ersten Mal Junge wirft, dann sind es also schon 2 Paare. Im vierten Monat leben weiterhin unsere 2 Paare, aber nur das ältere wirft Junge, da das jüngere Paar erst geschlechtsreif geworden ist, insgesamt finden wir also 3 Paare.

Allgemein leben in der n-ten Generation immer so viele Kaninchenpaare wie in der (n-1)-ten Generation, da ja kein Kaninchen stirbt und dazu kommen die Jungen, die von den Paare geworfen werden, welche in der (n-1)-ten Generation schon geschlechtsreif waren, also schon in der (n-2)-ten Generation lebten.

Daraus ergibt sich die Fibonacci-Folge, in der n-ten Generation leben also immer f_n Kaninchenpaare.

AUFGABE 7 Bienenstammbaum



In einem Bienenvolk leben neben der Königin und den Arbeiterinnen zeitweise auch männliche Bienen, deren einzige Aufgabe darin besteht, die Königin zu befruchten. Diese männlichen Bienen heißen Drohnen und entstehen aus unbefruchteten Eiern (haploiden Eiern, also Eiern mit nur einfachem Chromosomensatz), sie haben also, im Gegensatz zu ihren weiblichen Artgenossen, welche aus befruchteten Eiern erwachsen, keinen Vater.

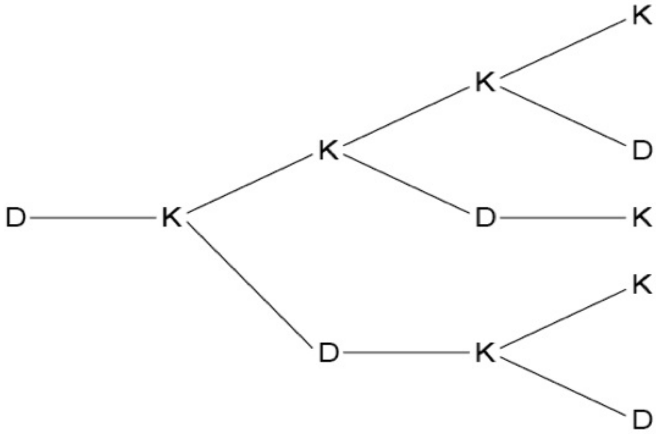
Erstelle eine Art Stammbaum einer Drohne und ermittle wie viele direkte Vorfahren sie hat, wenn man bis auf die n-te Generation vor der jetzt lebenden Drohe zurückgeht.

Tipp:

- Male einen Stammbaum

Lösung:

In der ersten Generation lebt nur ein Tier, nämlich die von uns betrachtete Drohne. Die direkte Vorgängergeneration weist ebenfalls nur ein Tier auf, nämlich die Mutter unserer Drohne, also eine Königin, einen Vater hat unsere Drohne ja nicht. Sehr wohl aber diese Königin, deshalb lebten in der dritten Vorgängergeneration zwei Tiere, eine Königin und eine Drohne, von denen die Drohne wiederum nur eine Mutter, die Königin jedoch zwei Eltern hat (vgl. Diagramm). In der jeweiligen „Großelterngeneration“ leben also immer so viele Tiere wie in der „Elterngeneration“, da jedes „Elternteil“ (egal ob männlich oder weiblich) ja zumindest eine Mutter hat, und zudem nochmal so viele Tiere wie in der „Enkelgeneration“, da jede ihrer Mütter wieder einen Vater (der „Enkel“ also genau einen „Opa“) hat. Insgesamt ergibt sich also die Fibonacci-Folge mit der n-ten Fibonaccizahl als Anzahl der Vorfahren in der n-ten Generation, wenn man unsere Drohne als erste Generation betrachtet.



AUFGABE 8 Baumschnitt

Ein Gärtner pflegt in seinem Garten einen jungen Baum. Im ersten sprießt ein neuer Trieb, welcher ab dem zweiten Jahr einen Seitentrieb hervorbringt, den der Gärtner jedoch abschneidet. Ab dem dritten Jahr lässt jedoch einen der sich entwickelnden Seitentriebe stehen. Und nach diesem Muster verfährt er bei jedem neuen Trieb des Baumes.

Wie viele Zweige besitzt der Baum nach 10 bzw. n Jahren?

Tipp:

- Zeichne einen Zweig und die Seitentriebentwicklung (in Abhängigkeit der vergehenden Jahre).

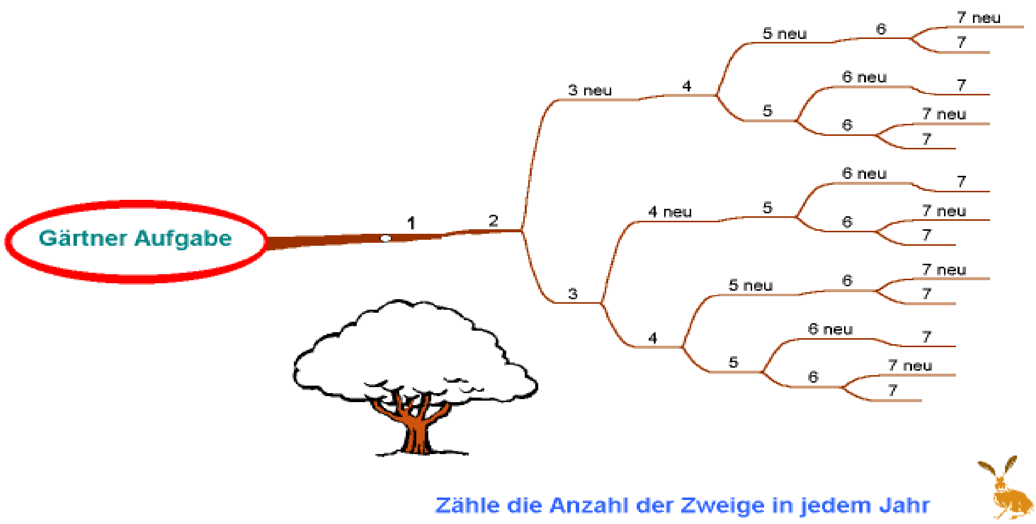
Lösung:

In den ersten beiden Jahren hat der Baum nur seinen ersten Zweig, welcher ab dem dritten einen Seitentrieb trägt, also hat der Baum dann insgesamt zwei Triebe. Von nun an trägt der Baum in jedem Jahr so viele Triebe wie im Vorjahr und zusätzlich je einen Seitentrieb der Zweige, die 2 Jahre zuvor schon vorhanden waren (siehe Abbildung).

Dies führt uns zur Rekursionsformel für die Zweiganzahl im n-ten Jahr:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$$

Zusammen mit den Startwerten für die ersten beiden Jahre $f_1 = f_2 = 1$ erhalten wir also die Fibonacci-Folge und die Zweiganzahl im n-ten Jahr ist genau f_n.



AUFGABE 9 Explizite Darstellung der Fibonacci-Folge

Neben der rekursiven Definition der Fibonacci-Zahlen ist auch eine explizite Darstellung dieser Folge bekannt, d.h. man kann Folgeglieder der Fibonacci-Folge durch eine Formel berechnen, ohne die vorhergehenden Fibonacci-Zahlen zu kennen.

Zeige, dass die Formel von Moivre-Binet (benannt nach Abraham de Moivre und Jacques Philippe Marie Binet, die sie im Jahre 1730 bzw. 1843 entdeckten) äquivalent zu unserer Rekursionsformel mit den Startwerten $f_o=f_1=1$ ist.

Moivre-Binet: $$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Tipps:

- Vollständige Induktion
- Beachte die Gleichungen, die für den goldenen Schnitt gelten.

Lösung:

Die Behauptung wird mittels vollständiger Induktion nach n bewiesen:

Induktionsanfang: Die Behauptung ist richtig für unsere Startwerte $f_1=f_2=1$

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+\sqrt{5}-1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = 1 \quad \text{und}$$

$$f_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1+2\sqrt{5}+5-1+2\sqrt{5}-5}{4} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1$$

Induktionsvoraussetzung: Es gelte für eine natürliche Zahl n, dass die Formel von Moivre-Binet den selben Wert für f_n ergibt, wie die Rekursionsformel.

Induktionsschluss:

Ist die explizite Darstellung für ein natürliches n äquivalent zu unserer Rekursion, so gilt für n+1:

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \right) - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{\frac{1-\sqrt{5}}{2}} \right) \right] =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]=$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]+\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}\right]=f_{n-1}+f_n=f_{n+1}$$

Für die Umformungen im Induktionsschluss werden außerdem folgende Aussagen benötigt:

$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=1+\frac{1}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}$ um von der ersten auf die zweite Zeile zu kommen und

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+1$$

Analoges gilt auch für $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$.

AUFGABE 10 Der „goldene Zirkel“

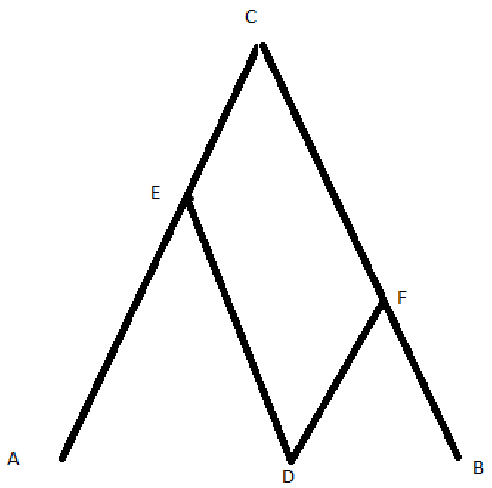
Entwerft eine Art Zirkel, mit dessen Hilfe man sofort bestimmen kann, ob ein Punkt eine bestimmte Strecke im goldenen Schnitt teilt oder nicht.

Bastelt euer Modell (z.B. aus Tonpapier) und testet es an beiliegendem Bild, einem Selbstportrait Dürers aus dem Jahr 1500.

Tipps:

- Nimm die Grundform eines normalen Zirkels und baue einen Einsatz, der dir den Teilungspunkt zeigt.
- Skizze des Zirkels.

Lösung:



„Bastelanleitung“:

Zuerst bastelt zwei gleichlange Schenkel für den Zirkel und verbindet sie an einem Ende beweglich. Nun berechnet man die Längen der Teilstücke, wenn ein Punkt die Schenkel im goldenen Schnitt teilt und stellt jeweils eine Strebe mit passender Länge her. Diese werden an den errechneten Teilungspunkten der Schenkel beweglich befestigt (und zwar so, dass quasi zwei neue gleichschenklige Dreiecke entstehen, siehe Bild) und am anderen Ende beweglich verbunden.

Setzt man nun die Zirkelenden an die Endpunkte der zu prüfenden Gesamtstrecke, so mit der durch die Spitze der Einsätze gezeigte Punkt der Teilungspunkt sein, der die Gesamtstrecke im goldenen Schnitt teilt.

Funktionsweise:

DFCE bildet ein Parallelogramm da jeweils die gegenüberliegenden Seiten gleich lang sind (nach Konstruktion). Damit sind seine Innenwinkel bei E und F gleich groß, also auch die Supplementwinkel. Betrachtet man nun die „gleichschenkligen Dreiecke links bzw. rechts unten, sind also ihre Winkel in der Spitze gleich. Damit sind ADE und DBF und aufgrund der Parallelität von ED zu CB bzw. von FD zu CA sind beide auch ähnlich zum großen gleichschenkligen Dreieck.

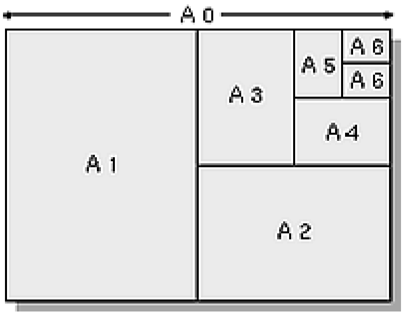
Also ist das Verhältnis von AD zu DB genau gleich wie das von ED zu FD („groß zu klein“) und das Verhältnis von AB zu AD genauso wie das von CA zu AE.

Insgesamt ergibt sich daraus, dass D die Strecke AB im goldenen Schnitt teilt und zwar unabhängig vom Winkel bei C.

Anwendung:

Die untere Haarkante teilt die Bildhöhe im goldenen Schnitt.

AUFGABE 11 Papierformate



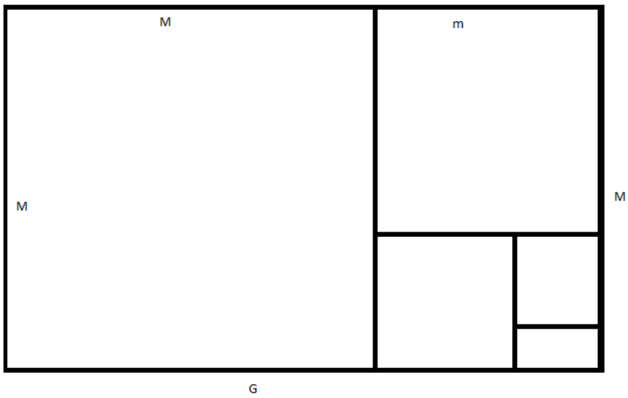
Faltet man ein Blatt unseres handelsüblichen Papiers in der Mitte der längeren Kante, so erhält man ein kleineres, welches allerdings genau das gleiche Seitenverhältnis aufweist wie das ursprüngliche Blatt. DIN-Formate kann man also durch Halbieren in das nächstkleinere DIN-Format überführen.

Als „goldenes Rechteck“ bezeichnet man ein Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem goldenen Schnitt entspricht. Wie muss man ein solches falten, um (ohne Messung) ein kleineres goldenes Rechteck zu erhalten?

Tipp:

- Goldenes Rechteck aus Tonpapier.

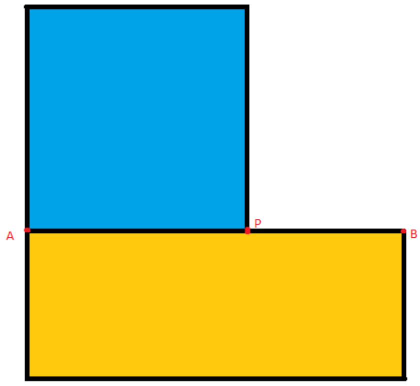
Lösung:



Faltet man eine Ecke des Rechtecks auf die gegenüberliegende Kante und teilt dann das Quadrat ab, dessen vierte Seite sich durch dieses einklappen ergeben hat ab, so ist das verbleibende Rechteck wieder ein goldenes.

Denn mit den in der Skizze verwendeten Seitenbenennungen wissen wir, dass G/M der goldene Schnitt ist. Sieht man nun G als ganzen und M als größeres Teilstück, so folgt aus der Definition des goldenen Schnittes, dass G/M= M/m , da G=m+M und das genau sollte gezeigt werden.

Aufgabe 12 Euklids goldener Schnitt



300 v.Chr. definierte Euklid den goldenen Schnitt in seinem Buch „Elemente“ wie folgt:

Ein Punkt teilt eine Strecke im goldenen Schnitt, wenn das Rechteck mit den Seitenlängen der ganzen Strecke und der kürzeren Teilstrecke den selben Flächeninhalt hat wie das Quadrat über die längere Teilstrecke.

Zeige, dass die Definition äquivalent ist zu unserer heutigen.

Tipp:

- Definition unseres Goldenen Schnittes.

Lösung

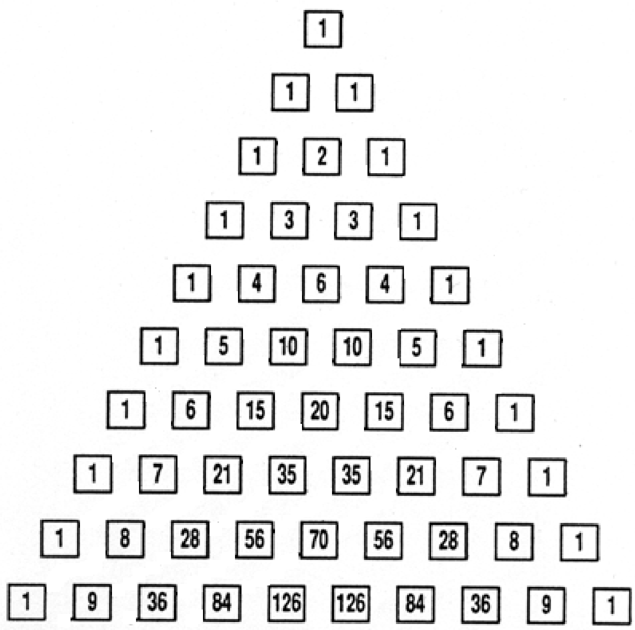
Das Rechteck mit Seitenlängen G (ganze Strecke) und m (kleinere Teilstrecke) hat den gleichen Flächeninhalt wie das Quadrat über die größere Teilstrecke M, also gilt: $G \cdot m = M^2$.

Teilt man diese Gleichung durch m und M erhält man die gewohnte Definition des goldenen Schnittes als Quotienten gleichen Werts: $\frac{G}{M} = \frac{M}{m}$

AUFGABE 13 Die Fibonacci-Zahlen im Pascalschen Dreieck

Das pascalsche Dreieck ist eine geometrische Darstellung der Binomialkoeffizienten. Sie sind im Dreieck derart angeordnet, dass jeder Eintrag die Summe der zwei darüberstehenden Einträge ist.

Wo finden sich die Fibonacci-Zahlen im pascalschen Dreieck?

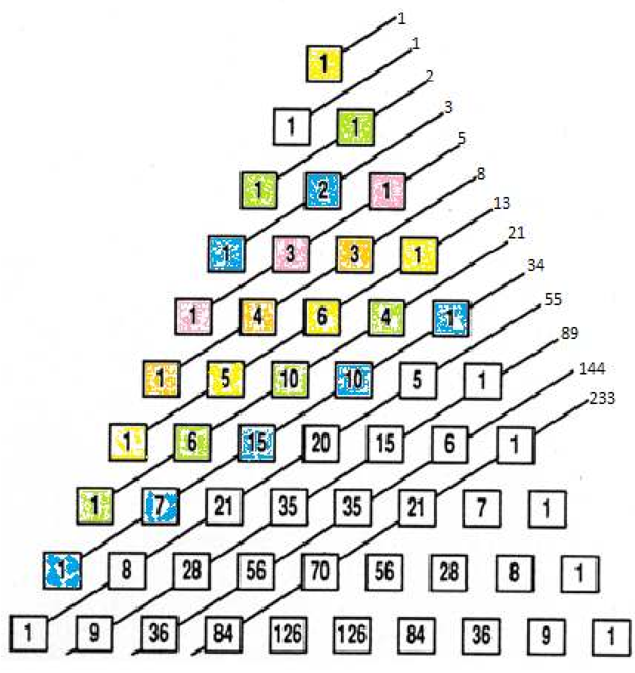


Tipp:

- Die Fibonacci-Zahlen sind als Summen versteckt.

Lösung:

Die Fibonacci-Zahlen ergeben sich jeweils aus der Summe von schräg nach rechtsoben verlaufenden Diagonalen.



AUFGABE 14 Code knacken

Löse folgenden Code:

144 5 610 377 1 2584 3 610 3 1 987 34 4118 1.

Tipp:

- bei richtiger Vermutung erhalten die Schüler als Hilfestellung folgende Tabelle:

n	f_n	n	f_n	n	f_n	n	f_n	n	f_n
0	0	10	55	20	6.765	30	832.040	40	102.334.155
1	1	11	89	21	10.946	31	1.346.269	41	165.580.141
2	1	12	144	22	17.711	32	2.178.309	42	267.914.296
3	2	13	233	23	28.657	33	3.524.578	43	433.494.437
4	3	14	377	24	46.368	34	5.702.887	44	701.408.733
5	5	15	610	25	75.025	35	9.227.465	45	1.134.903.170
6	8	16	987	26	121.393	36	14.930.352	46	1.836.311.903
7	13	17	1.597	27	196.418	37	24.157.817	47	2.971.215.073
8	21	18	2.584	28	317.811	38	39.088.169	48	4.807.526.976
9	34	19	4.181	29	514.229	39	63.245.986	49	7.778.742.049

Lösung:

Der Buchstabe A entspricht f_1, B entspricht f_2 usw. Als Lösungswort erhält man:

Leonardo da Pisa

INTERESSANTES: Fibonacci an der Börse

Auch in unserer heutigen Wirtschaftswelt „mischt Fibonacci mit“:

Ebbe und Flut

Für Ralph Nelson Elliott war dieses Phänomen wichtig. Elliott, im Übrigen einer der wenigen Aktienmarkttheoretiker, die durch ihre Theorien reich geworden sind, geht davon aus, dass das gesamte Universum und damit auch die Menschen von den Gesetzen der Natur beeinflusst werden. Nach Elliott folgen die menschlichen Euro Aktivitäten diesen Gesetzen - und zwar in ganz bestimmten Rhythmen. Als Vorbild für diesen Rhythmus dient ihm die Bewegung der Gezeiten. Der Welle folgt das Wellental, auf die Ebbe folgt die Flut - auf Aktion folgt Reaktion. Da die Aktienkurse menschliche Produkte, sozusagen die kollektiven Emotionen der Marktteilnehmer sind, müssen auch für sie diese Regeln gelten, folgert Elliott. Seine hochkomplexe Theorie hat er 1938 in dem Buch "The Wave Principle" veröffentlicht.

Fibonacci für Aktien

Wie gesagt, für Elliott bewegen sich die Aktienmärkte in Wellen. Eine Aktienrally oder Hausse entspricht vereinfacht gesagt der Flut, und diese wird, den natürlichen Gesetzen folgend, von der Ebbe abgelöst. An diesem Punkt kommt Fibonacci ins Spiel.

Elliott benutzt die Relationen von Fibonaccis "natürlicher" Zahlenreihe, um das Ausmass der Ebbe - der Kurskorrektur - zu prognostizieren. Dazu zerteilt er die Strecke zwischen dem Anfangs- und Endpunkt einer Preiskurve entsprechend den Regeln des Goldenen Schnitts. Neben 61,8 Prozent sind 50, 38,2 (das Verhältnis einer Fibonacci-Zahl zu ihrer übernächsten Zahl) und 100 Prozent die wichtigsten Marken der Fibonacci-Retracements (zu Deutsch Rückgänge). Die Zielmarken für Kursausdehnungen, z. B. über einen früheren Hochstand hinaus, werden ermittelt, indem man die Retracemet-Marken jeweils um 100 auf 138,2 Prozent, 150, 161,8 Prozent usw. erweitert. Diese Ziele werden als Projektionsmarken bezeichnet.

"Und genau diese Marken sind sehr oft wichtige Unterstützungs- oder Widerstandsmarken", erläutert Robert Schittler, Charttechniker der Raiffeisengruppe. "Manchmal ist es fast unheimlich, wie exakt sich die Kursverläufe an die Fibonacci-Marken halten", meint Schittler und verweist auf den DAX-Chart (siehe unten links).

Ästhetischer Kursverlauf

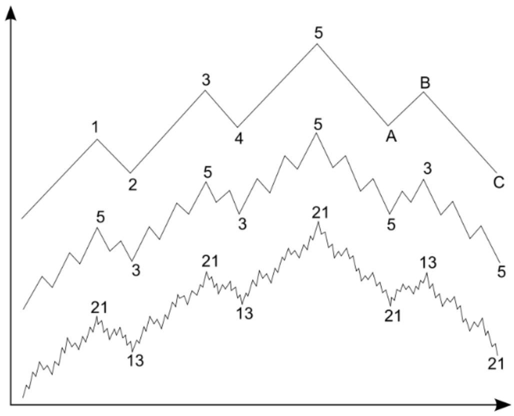
"Charttechnik ist im Grunde die Antizipation künftiger Kurse aus historischen Kursverläufen. Bei der Betrachtung von Charts orientieren wir uns bewusst oder unbewusst an ästhetischen Gesichtspunkten - Preislinien werden sozusagen ästhetisch weitergedacht. Und da Ästhetik eine kollektive Wahrnehmung ist, kommen fast alle, die ein und denselben Chart betrachten, zu identen oder zumindest ähnlichen Antizipationen. Ein gewisses Element einer selbsterfüllenden Prophezeiung ist bei der Fibonacci-Technik nicht von der Hand zu weisen", ergänzt der Charttechniker. Schittler selbst ist wegen der seiner Ansicht nach viel zu vage formulierten Regeln zur Identifikation der 13 unterschiedlichen Wellentypen kein Fan der Elliott-Wellentheorie.

"Die Rosinen, sprich die Fibonacci-Verhältnisse, sollte sich aber jeder engagierte Privatanleger herauspicken", so sein Rat. Die Verwendung ist einfach und die Fibonacci-Relationen sind in jedem modernen Chart-Programm enthalten. Die Stärke der Fibonacci-Technik ist, dass sich mit ihrer Hilfe Prognosen auf allen Zeitebenen treffen lassen, und sie ist optimal zur Platzierung von Kauf- oder Stop-Loss-Orders geeignet, da bei Über- oder Unterschreiten einer Linie die nächste Linie mit hoher Wahrscheinlichkeit erreicht wird.

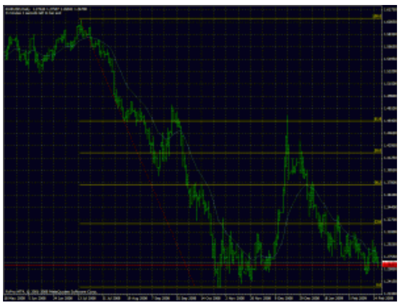
Auszug von www.wirtschaftsblatt .at

Grundlagen der Elliot-Theorie:

Elliot erkannte die genauere Struktur von Kursverläufen. Er teilte dazu Preiskurven in Impulswellen (übergeordneter Trend) und Korrekturwellen (gegenläufig) ein. Jede Impulswelle kann selbst wieder in 5 Wellen unterteilt werden, jede Korrekturwelle in 3 (Achtung, dabei ändert sich natürlich der übergeordnete Trend, sodass aufsteigende Linien innerhalb einer abwärtsführenden Korrekturwelle als Korrekturwelle zu sehen sind, absteigende als Impulswelle). Führt man diese Einteilung fort, erhält man immer eine Fibonaccianzahl von Wellen (siehe Grafik).



Außerdem kann man in einen Kursverlauf sogenannte Fibonacci-Retracement-Marken einzeichnen. Dazu nimmt man sich einen lokalen Hoch- und eine lokalen Tiefpunkt und teilt den Verlauf durch drei waagrechte Linien bei 38.2% (entspricht f_n/f_{n+2}), 50% (1/2) und 61,8% (entspricht f_n/f_{n+1}, also dem goldenen Schnitt). Entlang dieser Horizontalen beobachtet man besonders häufig Trendwenden im Kursverlauf. Diese Linien sind als häufiges Tool in Börsencomputerprogrammen zu finden.



Beide Methoden sind auf verschiedene Zeitintervalle anwendbar und es lassen sich daraus Hinweise für gute Zeitpunkte für An- und Verkauf von Aktien erhalten.

INTERESSANTES: Fibonacci und der goldene Schnitt in der Musik

Fibonacci in der Musik

Da die Fibonacci-Folge überall in der Natur vorkommt, liegt die Vermutung nahe, dass dies auch in der Musik so ist, denn dem Menschen erscheinen offenbar Dinge, die nach der Fibonacci-Folge oder dem Goldenen Schnitt funktionieren als harmonisch und schön. Wieso sollte dies nun in der Musik, die die meisten Menschen als harmonisch empfinden, anders sein.

Die Vermutung ist richtig. Diese Zahlenfolge ist auch in der Musik allgegenwärtig. Beispielsweise sind Musikinstrumente teilweise mit Fibonacci-Zahlen beschreibbar und auch die Tonfrequenzen haben etwas damit zu tun.

Fibonacci in Musikinstrumenten

Klavier

Die Tasten einer Oktave lassen sich komplett mit Fibonacci-Zahlen einteilen:

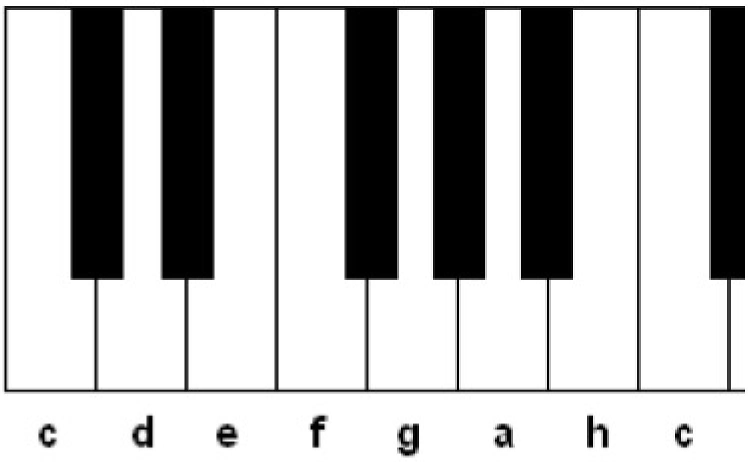


Fig.34 Oktave im Goldenen Schnitt

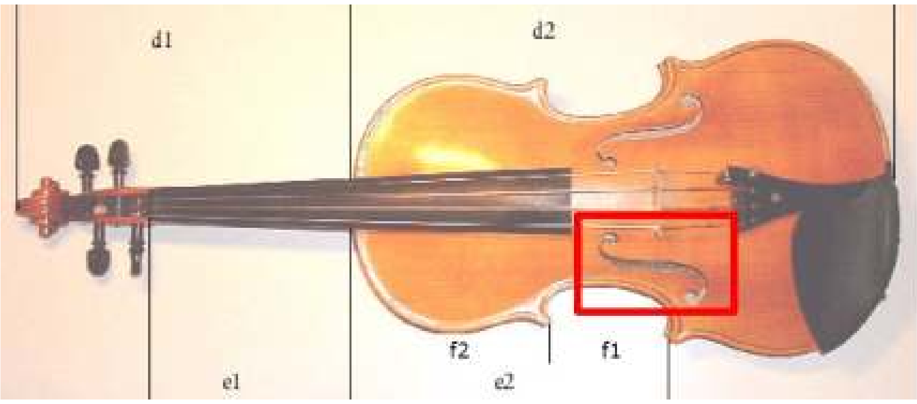
Eine Oktave hat…

- …13 Tasten (wenn man die Töne, die eine Oktave auseinander liegen, dazuzählt).
- …8 weisse Tasten.
- …5 schwarze Tasten
- …die schwarzen Tasten sind aufgeteilt in 2er- und 3er-Gruppen

Da dies eine Einteilung ist, die von Menschen gemacht wurde, kann man darin aber schwer eine Harmonie der Natur sehen. Möglicherweise wurde der Mensch, als er diese Einteilung entwickelte, von seinem natürlichen Harmoniebedürfnis geleitet.

Violine

Beim Geigenbau spielen die Fibonacci-Zahlen in Form des Goldenen Schnitts eine wesentliche Rolle bei der Gestaltung des Resonanzkörpers. In Fig.34 stehen jeweils die Strecken d1 und d2, e1 und e2 sowie f1 und f2 zueinander im Goldenen Schnitt. Diese Bauform hat sich über die Jahrhunderte als günstig erwiesen, was sich auch physikalisch erklären lässt: Ein normaler Resonanzkörper wird meist einige Tonfrequenzen in grösserem Ausmasse verstärken als andere. Dadurch entsteht ein nicht linearer Klangbereich. Dieses Phänomen lässt sich durch die oben besprochene Bauform vermindern.



Auch der Geigenbauer Antonio Stradivari (1648-1737), der für seine klanglich vollendeten Instrumente bekannt ist, soll den goldenen Schnitt verwendet haben, um die Position der F-Löcher in seinen Violinen zu berechnen. Dies sind die beiden Löcher auf der Oberseite der Geige, seitlich des Stegs (Fig.34 rot markiert). Dies ist allerdings nicht gesichert, da nur wenige Aufzeichnungen und Dokumente Stradivaris erhalten sind.

Fig.35 Einteilung der Geige im Goldenen Schnitt von Johann Goldfuss

Der goldene Schnitt in den Werken grosser Komponisten

Es gibt zwei Arten, wie der Goldene Schnitt in der Musik auftreten kann. Einerseits können die Frequenzen zweier Töne zusammen im Goldenen Schnitt stehen. Andererseits kann ein Stück aus mehreren Teilen bestehen, deren Dauer ebenfalls die Bedingungen des Goldnen Schnitts einhalten. Ein Künstler, der den Goldenen Schnitt häufig anwendete, war Béla Bartók. Ein Beispiel dafür ist seine „Sonate für zwei Klaviere und Schlagzeug“. Das gesamte Stück, bestehend aus 2 Sätzen (Teilen), ist 6432 Achtelnoten lang, wobei der zweite Satz 3975 Achtel dauert. Diese beiden Zahlen stehen zusammen recht genau im goldenen Schnitt. Obwohl Bartók selbst sich nie zu diesem Thema geäussert hat, deutet vieles darauf hin, dass er den Goldenen Schnitt kannte und mochte. Es heisst, seine Lieblingsblume sei die Sonnenblume gewesen, und er habe immer einen Tannenzapfen auf dem Schreibtisch liegen gehabt. Beides sind bekannte Symbole für die Fibonacci-Folge und den Goldenen Schnitt in der Natur.

Auch von Wolfgang Amadeus Mozart, einem der grössten und genialsten Musiker aller Zeiten, weiss man, dass er eine Faszination für Mathematik und Zahlenspiele besass. Oft findet man an den Rändern von Mozarts Kompositionen mathematische Gleichungen.

Es erstaunt daher nicht, dass sich auch in seinen Werken der Goldene Schnitt finden lässt. Ein Beispiel ist seine Sonate Nr. 1 in C-Dur. Diese besteht wie alle Sonaten aus verschiedenen Sätzen, wobei zu Mozarts Zeit jeder Satz in 2 Teile gegliedert war. Bei der erwähnten Sonate verhalten sich die Längen der Teile des ersten Satzes ziemlich genau im Goldenen Schnitt. Auch andere Sonaten Mozarts scheinen den Goldenen Schnitt nachzubilden.

Ähnliche Beobachtungen kann man auch bei anderen Komponisten wie z. B. Bach und Debussy machen.

Daraus lässt sich natürlich nicht ableiten, dass die erwähnten Musiker den Goldenen Schnitt bewusst anwendeten oder dass dies gar die Genialität ihrer Werke ausmacht. Viel wahrscheinlicher ist es, dass dieses Prinzip sozusagen in uns Menschen verwurzelt ist und automatisch zum Vorschein kommt.

Wie man aus der Fibonacci-Folge Musik macht

Um auf Grundlage der Fibonacci-Folge ein Musikstück zu komponieren, gibt es verschiedene Wege. Einer davon ist, den Fibonacci-Zahlen passende Noten zuzuweisen, z. B. könnte die Zahl 1 der 1. weissen Taste des Klaviers (Fig.35) zugewiesen werden, dann entsprechend die 2 der 2. Taste, die 3 der 3. usw.

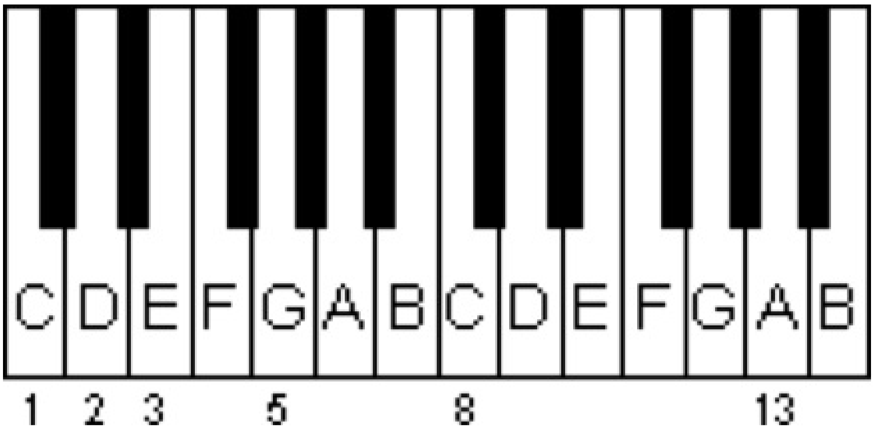


Fig.35 Tastatur eines Klaviers

So erhält man aber eine Tonfolge, die sehr schnell über die Klaviatur hinauswächst. Deshalb lässt man die Skala immer bei Überschreiten einer Oktave von vorne beginnen.

Dadurch erhält man folgende Tonfolge:

C D E G C A B A A G F D A C B C C D E G C A B A A G F D A C B C C D E G C A B A A

Nun entdeckt man etwas Interessantes: Die Tonfolge wiederholt sich alle 16 Töne:

C D E G C A B A A G F D A C B C

Und noch eine Überraschung stellt sich ein: Die entstandene Melodie tönt sogar gut!

Natürlich kann man diese Melodie noch variieren. Anstatt der weissen Tasten könnte man auch die schwarzen oder alle zusammen verwenden. Auch der Startton kann verändert werden.

http://fibonacci.stefanruf.ch/instrumente.php