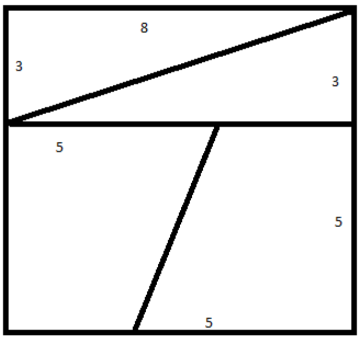
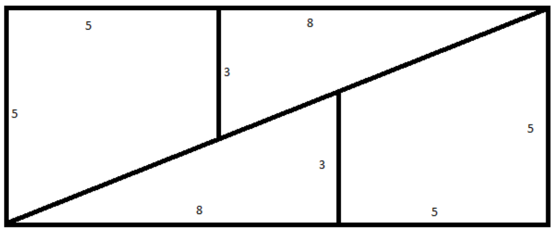
AUFGABE 1 **Treppensteigen**

Ein Briefträger stellt in einem Hochhaus, in dessen Treppenhaus sich enorm viele Stufen befinden jeden Tag die Post zu. Nachdem er die erste Stufe betreten hat, kann er sich bei jeder Stufe entscheiden, ob er um schneller ans Ziel zu kommen die nächste Stufe überspringt oder sie ganz normal betritt, was weniger Kraft kostet. Auf wie viele verschiedene Arten kann er die fünfte, die achte und die n-te Stufe erreichen?

AUFGABE 2 **64=65?**

Das unten abgebildete Quadrat mit Seitenlänge acht LE hat offensichtlich den Flächeninhalt FE. Durch umlegen der Einzelteile erhält man das darunter abgebildete Rechteck, mit den Seitenlängen 13 LE und 5 LE, also 65 FE. Finde den Fehler und überlege, ob selbiger Trick noch für andere Zahlenpaare funktioniert.

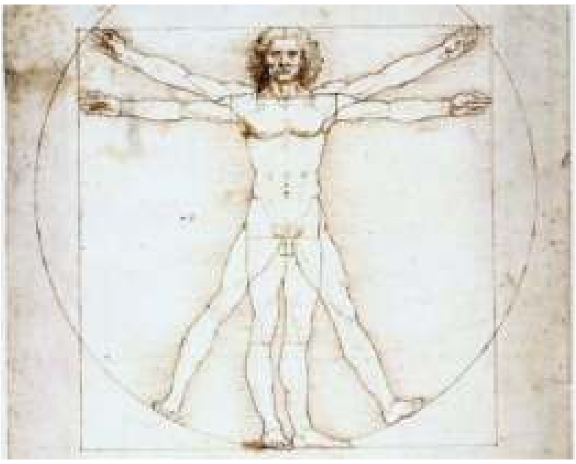




AUFGABE 3 **Teilerfremdheit**

Beweise, dass je zwei aufeinander folgende Fibonaccizahlen f_n und f_{n+1} teilerfremd sind, also ihr größter gemeinsamer Teiler 1 ist.

AUFGABE 4 Goldener Schnitt an unserem Körper



Der goldene Schnitt findet sich immer wieder in der Natur, so auch am menschlichen Körper. Nehmt auch das Maßband und versucht den goldenen Schnitt an euch selbst zu finden und tragt eure Messwerte in die Tabelle ein. Gibt es Punkte, die bei allen Menschen den Körper oder Körperteile im goldenen Schnitt teilen?

Macht euch eine eigene Tabelle und tragt in die ausliegende nur die Teilverhältnisse ein.

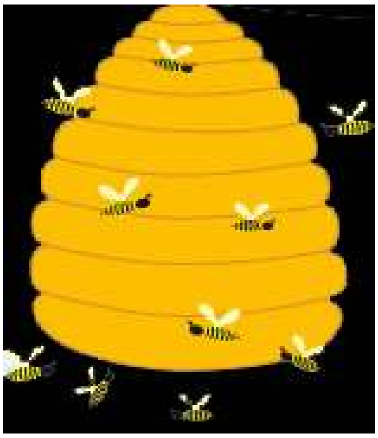
AUFGABE 5 Die Fibonacci-Zahlen in der Natur

In der Kiste findet ihr verschiedene Naturprodukte. Schaut sie euch sehr genau an und versucht die Fibonacci-Folge an ihnen zu finden.

AUFGABE 6 Kaninchenaufgabe

Ein neugeborenes Kaninchenpaar ist nach einem Monat geschlechtsreif und wirft also ab dem zweiten Monat jeden Monat ein neues Kaninchenpaar, welches wiederum nach einem Monat geschlechtsreif ist und wiederum ein Paar Junge wirft. Berechne die Anzahl der Kaninchenpaare am Ende des 10. Bzw. n-ten Monats unter der Annahme, dass die Kaninchen unsterblich sind und pro Wurf immer ein Männchen und ein Weibchen zur Welt kommen.

AUFGABE 7 **Bienenstammbaum**



In einem Bienenvolk leben neben der Königin und den Arbeiterinnen zeitweise auch männliche Bienen, deren einzige Aufgabe darin besteht, die Königin zu befruchten. Diese männlichen Bienen heißen Drohnen und entstehen aus unbefruchteten Eiern (haploiden Eiern, also Eiern mit nur einfachem Chromosomensatz), sie haben also, im Gegensatz zu ihren weiblichen Artgenossen, welche aus befruchteten Eiern erwachsen, keinen Vater.

Erstelle eine Art Stammbaum einer Drohne und ermittle wie viele direkte Vorfahren sie hat, wenn man bis auf die n-te Generation vor der jetzt lebenden Drohe zurückgeht.

AUFGABE 8 **Baumschnitt**

Ein Gärtner pflegt in seinem Garten einen jungen Baum. Im ersten sprießt ein neuer Trieb, welcher ab dem zweiten Jahr einen Seitentrieb hervorbringt, den der Gärtner jedoch abschneidet. Ab dem dritten Jahr lässt jedoch einen der sich entwickelnden Seitentriebe stehen. Und nach diesem Muster verfährt er bei jedem neuen Trieb des Baumes.

Wie viele Zweige besitzt der Baum nach 10 bzw. n Jahren?

AUFGABE 9 **Explizite Darstellung der Fibonacci-Folge**

Neben der rekursiven Definition der Fibonacci-Zahlen ist auch eine explizite Darstellung dieser Folge bekannt, d.h. man kann Folgeglieder der Fibonacci-Folge durch eine Formel berechnen, ohne die vorhergehenden Fibonacci-Zahlen zu kennen.

Zeige, dass die Formel von Moivre-Binet (benannt nach Abraham de Moivre und Jacques Philippe Marie Binet, die sie im Jahre 1730 bzw. 1843 entdeckten) äquivalent zu unserer Rekursionsformel mit den Startwerten $f_o=f_1=1$ ist.

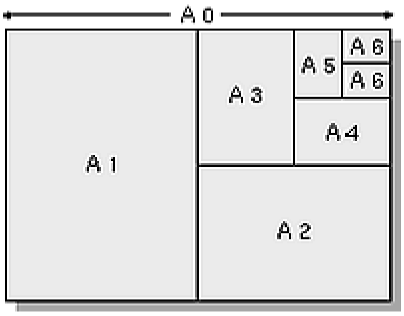
Moivre-Binet: $$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

AUFGABE 10 **Der „goldene Zirkel“**

Entwerft eine Art Zirkel, mit dessen Hilfe man sofort bestimmen kann, ob ein Punkt eine bestimmte Strecke im goldenen Schnitt teilt oder nicht.

Bastelt euer Modell (z.B. aus Tonpapier) und testet es an beiliegendem Bild, einem Selbstportrait Dürers aus dem Jahr 1500.

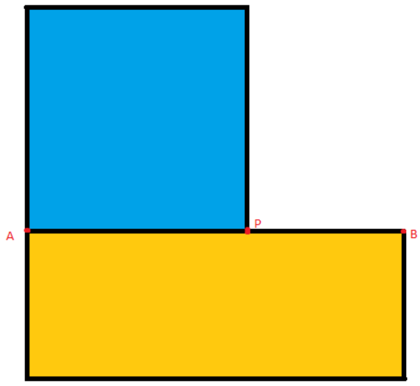
AUFGABE 11 Papierformate



Faltet man ein Blatt unseres handelsüblichen Papiers in der Mitte der längeren Kante, so erhält man ein kleineres, welches allerdings genau das gleiche Seitenverhältnis aufweist wie das ursprüngliche Blatt. DIN-Formate kann man also durch Halbieren in das nächstkleinere DIN-Format überführen.

Als „goldenes Rechteck“ bezeichnet man ein Rechteck, dessen Seitenverhältnis dem goldenen Schnitt entspricht. Wie muss man ein solches falten, um (ohne Messung) ein kleineres goldenes Rechteck zu erhalten?

AUFGABE 12 Euklids goldener Schnitt



300 v.Chr. definierte Euklid den goldenen Schnitt in seinem Buch „Elemente“ wie folgt:

Ein Punkt teilt eine Strecke im goldenen Schnitt, wenn das Rechteck mit den Seitenlängen der ganzen Strecke und der kürzeren Teilstrecke den selben Flächeninhalt hat wie das Quadrat über die längere Teilstrecke.

Zeige, dass die Definition äquivalent ist zu unserer heutigen.

AUFGABE 13 Die Fibonacci-Zahlen im Pascalschen Dreieck

Das pascalsche Dreieck ist eine geometrische Darstellung der Binomialkoeffizienten. Sie sind im Dreieck derart angeordnet, dass jeder Eintrag die Summe der zwei darüberstehenden Einträge ist.

Wo finden sich die Fibonacci-Zahlen im pascalschen Dreieck?

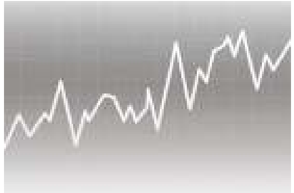
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

AUFGABE 14 Code knacken

Löse folgenden Code:

144 5 610 377 1 2584 3 610   3 1   987 34 4118 1.

INTERESSANTES: **Fibonacci an der Börse**



Auch in unserer heutigen Wirtschaftswelt „mischt Fibonacci mit“:

Ebbe und Flut

Für Ralph Nelson Elliott war dieses Phänomen wichtig. Elliott, im Übrigen einer der wenigen Aktienmarkttheoretiker, die durch ihre Theorien reich geworden sind, geht davon aus, dass das gesamte Universum und damit auch die Menschen von den Gesetzen der Natur beeinflusst werden. Nach Elliott folgen die menschlichen Euro Aktivitäten diesen Gesetzen - und zwar in ganz bestimmten Rhythmen. Als Vorbild für diesen Rhythmus dient ihm die Bewegung der Gezeiten. Der Welle folgt das Wellental, auf die Ebbe folgt die Flut - auf Aktion folgt Reaktion. Da die Aktienkurse menschliche Produkte, sozusagen die kollektiven Emotionen der Marktteilnehmer sind, müssen auch für sie diese Regeln gelten, folgert Elliott. Seine hochkomplexe Theorie hat er 1938 in dem Buch "The Wave Principle" veröffentlicht.

Fibonacci für Aktien

Wie gesagt, für Elliott bewegen sich die Aktienmärkte in Wellen. Eine Aktienrally oder Hausse entspricht vereinfacht gesagt der Flut, und diese wird, den natürlichen Gesetzen folgend, von der Ebbe abgelöst. An diesem Punkt kommt Fibonacci ins Spiel.

Elliott benutzt die Relationen von Fibonaccis "natürlicher" Zahlenreihe, um das Ausmass der Ebbe - der Kurskorrektur - zu prognostizieren. Dazu zerteilt er die Strecke zwischen dem Anfangs- und Endpunkt einer Preiskurve entsprechend den Regeln des Goldenen Schnitts. Neben 61,8 Prozent sind 50, 38,2 (das Verhältnis einer Fibonacci-Zahl zu ihrer übernächsten Zahl) und 100 Prozent die wichtigsten Marken der Fibonacci-Retracements (zu Deutsch Rückgänge). Die Zielmarken für Kursausdehnungen, z. B. über einen früheren Hochstand hinaus, werden ermittelt, indem man die Retracemet-Marken jeweils um 100 auf 138,2 Prozent, 150, 161,8 Prozent usw. erweitert. Diese Ziele werden als Projektionsmarken bezeichnet.

"Und genau diese Marken sind sehr oft wichtige Unterstützungs- oder Widerstandsmarken", erläutert Robert Schittler, Charttechniker der Raiffeisengruppe. "Manchmal ist es fast unheimlich, wie exakt sich die Kursverläufe an die Fibonacci-Marken halten", meint Schittler und verweist auf den DAX-Chart (siehe unten links).

Ästhetischer Kursverlauf

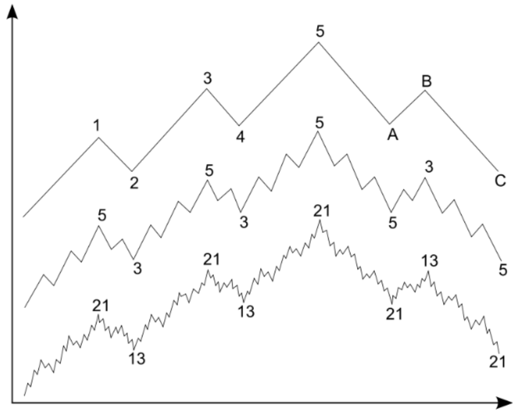
"Charttechnik ist im Grunde die Antizipation künftiger Kurse aus historischen Kursverläufen. Bei der Betrachtung von Charts orientieren wir uns bewusst oder unbewusst an ästhetischen Gesichtspunkten - Preislinien werden sozusagen ästhetisch weitergedacht. Und da Ästhetik eine kollektive Wahrnehmung ist, kommen fast alle, die ein und denselben Chart betrachten, zu identen oder zumindest ähnlichen Antizipationen. Ein gewisses Element einer selbsterfüllenden Prophezeiung ist bei der Fibonacci-Technik nicht von der Hand zu weisen", ergänzt der Charttechniker. Schittler selbst ist wegen der seiner Ansicht nach viel zu vage formulierten Regeln zur Identifikation der 13 unterschiedlichen Wellentypen kein Fan der Elliott-Wellentheorie.

"Die Rosinen, sprich die Fibonacci-Verhältnisse, sollte sich aber jeder engagierte Privatanleger herauspicken", so sein Rat. Die Verwendung ist einfach und die Fibonacci-Relationen sind in jedem modernen Chart-Programm enthalten. Die Stärke der Fibonacci-Technik ist, dass sich mit ihrer Hilfe Prognosen auf allen Zeitebenen treffen lassen, und sie ist optimal zur Platzierung von Kauf- oder Stop-Loss-Orders geeignet, da bei Über- oder Unterschreiten einer Linie die nächste Linie mit hoher Wahrscheinlichkeit erreicht wird.

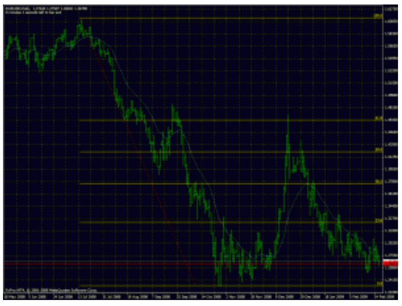
Auszug von www.wirtschaftsblatt .at

Grundlagen der Elliot-Theorie:

Elliot erkannte die genauere Struktur von Kursverläufen. Er teilte dazu Preiskurven in Impulswellen (übergeordneter Trend) und Korrekturwellen (gegenläufig) ein. Jede Impulswelle kann selbst wieder in 5 Wellen unterteilt werden, jede Korrekturwelle in 3 (Achtung, dabei ändert sich natürlich der übergeordnete Trend, sodass aufsteigende Linien innerhalb einer abwärtsführenden Korrekturwelle als Korrekturwelle zu sehen sind, absteigende als Impulswelle). Führt man diese Einteilung fort, erhält man immer eine Fibonaccianzahl von Wellen (siehe Grafik).



Außerdem kann man in einen Kursverlauf sogenannte Fibonacci-Retracement-Marken einzeichnen. Dazu nimmt man sich einen lokalen Hoch- und eine lokalen Tiefpunkt und teilt den Verlauf durch drei waagrechte Linien bei 38.2% (entspricht f_n/f_{n+2}), 50% (1/2) und 61,8% (entspricht f_n/f_{n+1}, also dem goldenen Schnitt). Entlang dieser Horizontalen beobachtet man besonders häufig Trendwenden im Kursverlauf. Diese Linien sind als häufiges Tool in Börsencomputerprogrammen zu finden.



INTERESSANTES: **Fibonacci und der goldene Schnitt in der Musik**

Fibonacci in der Musik

Da die Fibonacci-Folge überall in der Natur vorkommt, liegt die Vermutung nahe, dass dies auch in der Musik so ist, denn dem Menschen erscheinen offenbar Dinge, die nach der Fibonacci-Folge oder dem Goldenen Schnitt funktionieren als harmonisch und schön. Wieso sollte dies nun in der Musik, die die meisten Menschen als harmonisch empfinden, anders sein.

Die Vermutung ist richtig. Diese Zahlenfolge ist auch in der Musik allgegenwärtig. Beispielsweise sind Musikinstrumente teilweise mit Fibonacci-Zahlen beschreibbar und auch die Tonfrequenzen haben etwas damit zu tun.

Fibonacci in Musikinstrumenten

Klavier

Die Tasten einer Oktave lassen sich komplett mit Fibonacci-Zahlen einteilen:

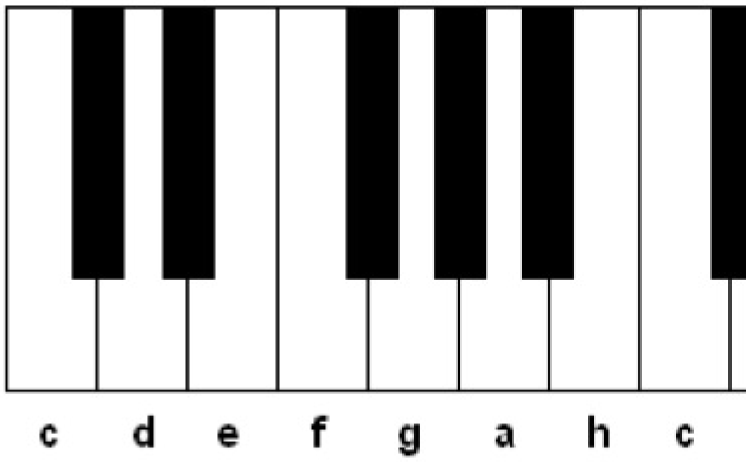


Fig.34 Oktave im Goldenen Schnitt

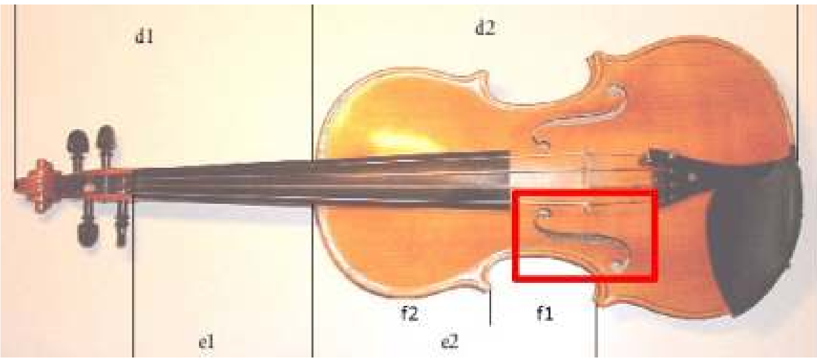
Eine Oktave hat…

- …13 Tasten (wenn man die Töne, die eine Oktave auseinander liegen, dazuzählt).
- …8 weisse Tasten.
- …5 schwarze Tasten
- …die schwarzen Tasten sind aufgeteilt in 2er- und 3er-Gruppen

Da dies eine Einteilung ist, die von Menschen gemacht wurde, kann man darin aber schwer eine Harmonie der Natur sehen. Möglicherweise wurde der Mensch, als er diese Einteilung entwickelte, von seinem natürlichen Harmoniebedürfnis geleitet.

Violine

Beim Geigenbau spielen die Fibonacci-Zahlen in Form des Goldenen Schnitts eine wesentliche Rolle bei der Gestaltung des Resonanzkörpers. In Fig.34 stehen jeweils die Strecken d1 und d2, e1 und e2 sowie f1 und f2 zueinander im Goldenen Schnitt. Diese Bauform hat sich über die Jahrhunderte als günstig erwiesen, was sich auch physikalisch erklären lässt: Ein normaler Resonanzkörper wird meist einige Tonfrequenzen in grösserem Ausmasse verstärken als andere. Dadurch entsteht ein nicht linearer Klangbereich. Dieses Phänomen lässt sich durch die oben besprochene Bauform vermindern.



Auch der Geigenbauer Antonio Stradivari (1648-1737), der für seine klanglich vollendeten Instrumente bekannt ist, soll den goldenen Schnitt verwendet haben, um die Position der F-Löcher in seinen Violinen zu berechnen. Dies sind die beiden Löcher auf der Oberseite der Geige, seitlich des Stegs (Fig.34 rot markiert). Dies ist allerdings nicht gesichert, da nur wenige Aufzeichnungen und Dokumente Stradivaris erhalten sind.

Fig.35 Einteilung der Geige im Goldenen Schnitt von Johann Goldfuss

Der goldene Schnitt in den Werken grosser Komponisten

Es gibt zwei Arten, wie der Goldene Schnitt in der Musik auftreten kann. Einerseits können die Frequenzen zweier Töne zusammen im Goldenen Schnitt stehen. Andererseits kann ein Stück aus mehreren Teilen bestehen, deren Dauer ebenfalls die Bedingungen des Goldnen Schnitts einhalten. Ein Künstler, der den Goldenen Schnitt häufig anwendete, war Béla Bartók. Ein Beispiel dafür ist seine „Sonate für zwei Klaviere und Schlagzeug". Das gesamte Stück, bestehend aus 2 Sätzen (Teilen), ist 6432 Achtelnoten lang, wobei der zweite Satz 3975 Achtel dauert. Diese beiden Zahlen stehen zusammen recht genau im goldenen Schnitt. Obwohl Bartók selbst sich nie zu diesem Thema geäussert hat, deutet vieles darauf hin, dass er den Goldenen Schnitt kannte und mochte. Es heisst, seine Lieblingsblume sei die Sonnenblume gewesen, und er habe immer einen Tannenzapfen auf dem Schreibtisch liegen gehabt. Beides sind bekannte Symbole für die Fibonacci-Folge und den Goldenen Schnitt in der Natur.

Auch von Wolfgang Amadeus Mozart, einem der grössten und genialsten Musiker aller Zeiten, weiss man, dass er eine Faszination für Mathematik und Zahlenspiele besass. Oft findet man an den Rändern von Mozarts Kompositionen mathematische Gleichungen.

Es erstaunt daher nicht, dass sich auch in seinen Werken der Goldene Schnitt finden lässt. Ein Beispiel ist seine Sonate Nr. 1 in C-Dur. Diese besteht wie alle Sonaten aus verschiedenen Sätzen, wobei zu Mozarts Zeit jeder Satz in 2 Teile gegliedert war. Bei der erwähnten Sonate verhalten sich die Längen der Teile des ersten Satzes ziemlich genau im Goldenen Schnitt. Auch andere Sonaten Mozarts scheinen den Goldenen Schnitt nachzubilden.

Ähnliche Beobachtungen kann man auch bei anderen Komponisten wie z. B. Bach und Debussy machen.

Daraus lässt sich natürlich nicht ableiten, dass die erwähnten Musiker den Goldenen Schnitt bewusst anwendeten oder dass dies gar die Genialität ihrer Werke ausmacht. Viel wahrscheinlicher ist es, dass dieses Prinzip sozusagen in uns Menschen verwurzelt ist und automatisch zum Vorschein kommt.

Wie man aus der Fibonacci-Folge Musik macht

Um auf Grundlage der Fibonacci-Folge ein Musikstück zu komponieren, gibt es verschiedene Wege. Einer davon ist, den Fibonacci-Zahlen passende Noten zuzuweisen, z. B. könnte die Zahl 1 der 1. weissen Taste des Klaviers (Fig.35) zugewiesen werden, dann entsprechend die 2 der 2. Taste, die 3 der 3. usw.

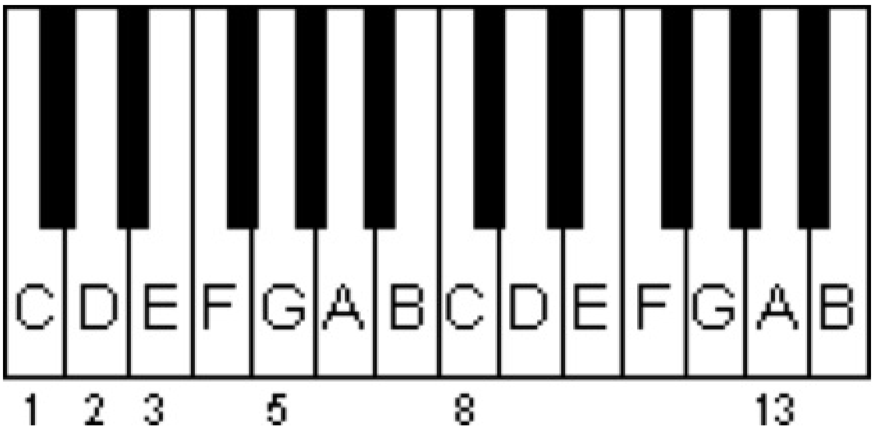


Fig.35 Tastatur eines Klaviers

So erhält man aber eine Tonfolge, die sehr schnell über die Klaviatur hinauswächst. Deshalb lässt man die Skala immer bei Überschreiten einer Oktave von vorne beginnen.

Dadurch erhält man folgende Tonfolge:

C D E G C A B A A G F D A C B C C D E G C A B A A G F D A C B C C D E G C A B A A

Nun entdeckt man etwas Interessantes: Die Tonfolge wiederholt sich alle 16 Töne:

C D E G C A B A A G F D A C B C

Und noch eine Überraschung stellt sich ein: Die entstandene Melodie tönt sogar gut!

Natürlich kann man diese Melodie noch variieren. Anstatt der weissen Tasten könnte man auch die schwarzen oder alle zusammen verwenden. Auch der Startton kann verändert werden.

http://fibonacci.stefanruf.ch/instrumente.php